MATEMÁTICAS II

Resumen de Teoría y Ejercicios

MATEMÁTICAS I y II

1º y 2º BACHILLERATO CIENCIAS

Maristas Granada

COLEGIO MARISTA "LA INMACULADA" (GRANADA)
Profesor: Daniel Partal García – www.danipartal.net

BREVE DESCRIPCIÓN

El presente documento muestra el índice de contenidos de la asignatura de Matemáticas II de 2ºBachillerato, el resumen de teoría y un listado de ejercicios esenciales (con la referencia a su solución en la web de la asignatura). El desarrollo completo de los materiales está disponible en la web de la asignatura: www.danipartal.net .

EVALUACIÓN	TEMA (EXAMEN ACUMULATIVO AL FINALIZAR CADA TEMA)
1ª Evaluación de septiembre a noviembre	Tema 1: Repaso 1ºBachillerato desde Sistemas a Derivadas (sesiones 1-25)
	Tema 2: Ampliación de Continuidad y Teoremas (sesiones 26-34)
	Tema 3: Ampliación de Derivabilidad y Teoremas (sesiones 35-44)
2ª Evaluación de diciembre a febrero	Tema 4: Probabilidad
	Tema 5: Integrales
	Tema 6: Ampliación de Sistemas de Ecuaciones y Matrices
3ª Evaluación de marzo a mayo	Tema 7: Estadística
	Tema 8: Determinantes
	Tema 9: Geometría tridimensional
Examen global final de mayo	Examen de hora y media de duración con el que subir la nota obtenida al finalizar la tercera evaluación

Las **actividades de calificación trimestrales** son:

- Tres pruebas escritas sin ayuda de apuntes personales.
- Explicaciones de problemas en la pizarra, respuestas orales a las preguntas de clase, trabajo diario observado por el profesor, tareas de grupo realizadas en clase y en casa, y trabajo con software matemático en el aula.

Los **contenidos de las actividades se acumulan a lo largo del curso**. Las actividades de calificación dan una evaluación (de Insuficiente a Sobresaliente) de los 18 criterios de evaluación que la ley educativa marca para las asignaturas de Matemáticas I y II. Calcular la media de la asignatura como una media de esos 18 criterios de evaluación es una tarea compleja de comprender por el alumnado y sus familias. Por lo tanto, siendo prácticos en la vida y buscando la mejor preparación posible al examen de acceso a la Universidad, fijaremos el siguiente patrón: 90% de la calificación corresponde a la media de las pruebas escritas y el 10% de la calificación corresponde a la media del resto de actividades. Estos porcentajes son una aproximación al porcentaje de criterios evaluados en cada tipo de actividad.

La evaluación es continua a lo largo de todo el curso. Por lo tanto, la nota en cualquier instante se calcula con el 90% de la media de los exámenes y con el 10% de la media del resto de actividades.

Si resaltamos los criterios de evaluación más significativos de la asignatura, podemos destacar:

- Seleccionar la solución más adecuada de un problema usando el razonamiento y la argumentación.
- Demostrar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.
- Resolver problemas en contextos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas y usando diferentes enfoques.
- Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.
- Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.
- Afrontar las situaciones de incertidumbre y tomar decisiones, evaluando distintas opciones, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

La nota final de la asignatura se calcula tras la realización del examen del Tema 9, ofreciéndose un examen escrito global final para subir la nota a finales de mayo. En ese examen global, no se baja nota.

"Knowledge isn't free. You have to pay attention."
— Richard P. Feynman

TEMA 1: REPASO DE 1ºBACHILLERATO

SESIÓN 1. Sistemas de ecuaciones con parámetro aplicando método de Gauss

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 1Bach - Sistemas y método de Gauss - Cap 9 "Otro ejemplo de sistemas con parámetro. Parte III" https://www.youtube.com/watch?v=k_EROcXJ7LQ

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: ¿De cuántas formas distintas se puede conseguir un euro, utilizando solo monedas de 5, 10 y 20 céntimos?

Al escribir un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, en notación matricial, tendremos tantas filas como ecuaciones y tantas columnas como el número de incógnitas más uno, ya que añadimos la columna de términos independientes (c_1 , c_2 , c_3 …).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right)$$

Los coeficientes a_{ij} de la diagonal principal son aquellos donde el número de filas (primer subíndice) coincide con el número de columnas (segundo subíndice): a_{11} , a_{22} , a_{33} … En el método de Gauss buscamos hacer 0 los coeficientes situados por debajo de la diagonal principal:

- Podemos intercambiar la posición de dos columnas (sin incluir la columna de términos independientes).
- Podemos intercambiar la posición de dos filas.
- Podemos operar con transformaciones lineales entre filas: $F_i' = a \cdot F_i + b \cdot F_j \ \ con\ a \neq 0$
- Una fila con todos los coeficientes y con el término independiente igual a 0 se puede eliminar (porque será una combinación del resto de ecuaciones).
- Una fila con todos los coeficientes nulos y el término independiente distinto de 0 es un absurdo matemático.
- Si hay dos filas con los coeficientes y los términos independientes proporcionales entre sí, implica que podemos eliminar una de las filas (por ser combinación lineal de la otra).
- Tras terminar el método de Gauss, comprobar que no hay absurdos matemáticos y eliminar las filas proporcionales, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente a_{ij} distinto de 0.

En sistemas de ecuaciones con un parámetro inicial k, los tipos de solución dependerán del valor de ese parámetro:

- Si un coeficiente de la diagonal principal depende del parámetro k, debemos igualar ese coeficiente a 0 para realizar la discusión de casos.
- Si un coeficiente de la diagonal principal es 0, debemos buscar (si hay) el primer coeficiente de esa fila que dependa del parámetro k. Y de encontrarlo, debemos igualar ese coeficiente a 0 para realizar la discusión de casos.
- Si todos los coeficientes de una fila son iguales a 0, y el término independiente de esa fila depende del parámetro k, debemos igualar a 0 el término independiente de esa fila para realizar la discusión de casos.

En la discusión de casos, tras completar el método de Gauss, razonamos así:

- Si aparece un absurdo matemático, tendremos Sistema Incompatible (S.I.) porque no hay solución. Los absurdos pueden ser de dos tipos:
  - 0 igual a un número distinto de 0.
  - Dos ecuaciones donde una misma incógnita tome dos valores distintos.
- Si el rango del sistema es menor al número de incógnitas, tendremos Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.) con infinitas soluciones. La diferencia entre el número de incógnitas y el rango del sistema coincide con el número de parámetros libres.
- Si el rango del sistema es igual al número de incógnitas, tendremos Sistema Compatible Determinado (S.C.D.) con solución única.

No confundir la palabra Incompatible con la palabra Indeterminado. La palabra Incompatible significa que no hay solución. Y la palara Indeterminado significa que la solución no es única, porque aparecen parámetros libres que generan infinitas soluciones. En sistemas de ecuaciones lineales, una incógnita (x, y, z …) puede tener o una única solución o infinitas soluciones. En caso contrario (si tiene 2 o 3 soluciones distintas) significa que estamos frente a un absurdo matemático y el sistema será Sistema Incompatible.

Problema 1 Sesión 1 (nivel inicial) a) Discute las soluciones del sistema $\begin{cases} a\,x + 7y + 5\,z = 0 \\ x + a\,y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$ según el parámetro a.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a = 4$.

(solución: 1ºBach - Tema 4 – Apartado 10 de Sistemas – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 1 (nivel inicial) a) Discute las soluciones del sistema $\begin{cases} x + my + z = 2 \\ mx - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$ según el parámetro m.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m = 1$.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF sistemas – Ejercicio Sistemas 6)

SESIÓN 2. Sistemas de ecuaciones en enunciados largos de contexto real

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 1Bach - Sistemas y método de Gauss - Cap 11 "Problema con enunciado para generar sistema" https://www.youtube.com/watch?v=WuuD63o18jc

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Quieres colocar cuatro velas en una tarta circular. ¿De cuántas maneras puedes colocar las velas de forma que no haya más de dos distancias diferentes entre dos velas consecutivas?

En enunciados extensos sobre contextos de la vida cotidiana, debemos identificar las variables como incógnitas. Una vez tengamos claro quiénes son las incógnitas, por norma general, cada frase del enunciado permite formar una ecuación del sistema. La coma y el punto suelen separar las distintas frases. Verbos como "ser", "costar", "pagar", etc. se pueden sustituir por el signo igual.

Si las incógnitas representan realidades como número de personas, o número de objetos, no tienen sentido soluciones negativas o de valores que no sean números enteros: por ejemplo, podemos tener un bolígrafo o dos bolígrafos, pero nunca un número decimal de bolígrafos.

Una ecuación lineal siempre tiene dos miembros. Es clave mantener las mismas unidades a la izquierda y a la derecha. Por ejemplo, si el miembro de la izquierda representa dinero, el miembro de la derecha también debe representar dinero. Si el miembro de la izquierda indica volumen, el miembro de la derecha también indicará volumen. Si a la izquierda tenemos número de objetos, a la derecha también tendremos número de objetos.

¡Ojo con los porcentajes! El 40% de una cantidad x se representa matemáticamente como $0{,}40x$ o bien como $\frac{40x}{100}$ en forma de fracción.

¡Y ojo también con los descuentos! Si se aplica un descuento del 30% a una cantidad x, el dinero que deberemos pagar finalmente será $0{,}70x$.

Problema 1 Sesión 2 (nivel inicial) a) Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones.

- Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.
- Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.
- Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35€, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF sistemas – Ejercicio Enunciados 1)

Problema 2 Sesión 2 (nivel inicial) Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15€, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20€.

a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25€, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona tu respuesta.

b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF sistemas – Ejercicio Enunciados 2)

Problema 3 Sesión 2 (nivel inicial) El cajero automático de una determinada entidad bancaria solo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

(solución: 1ºBach – Tema 4 – Apartado 11 – Ejercicio 3)

Problema 4 Sesión 2 (nivel inicial) Un mayorista vende billetes de avión a agencias de viajes. A una primera agencia A le vende 10 billetes nacionales, 10 billetes de países comunitarios y otros 10 billetes a países no europeos y le cobra 12000 euros. También le vende a una agencia B 10 billetes nacionales y 20 a países no europeos y le cobra 13000. Y a una agencia C le vende 10 billetes nacionales y 10 billetes comunitarios y le cobra 7000 euros. ¿Cuál es el precio de cada billete?

(solución: 1ºBach – Tema 4 – Apartado 11 – Ejercicio 2)

SESIÓN 3. Sistemas de ecuaciones en enunciados largos de contexto real (continuación)

Problema 1 Sesión 3 (nivel medio) En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7,50€. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7,20€.

a) Calcula, de manera razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2€? Razona tu respuesta.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF sistemas – Ejercicio Enunciados 5)

Problema 2 Sesión 3 (nivel avanzado) Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5€, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF sistemas – Ejercicio Enunciados 6)

Problema 3 Sesión 3 (nivel avanzado) Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

Problema 4 Sesión 3 (nivel avanzado) Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 4)

Problema 5 Sesión 3 (nivel avanzado) El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 14)

SESIÓN 4. Sistemas de ecuaciones en enunciados largos de contexto real (continuación)

Problema 1 Sesión 4 (nivel inicial) Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. ¿Se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica? En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas. (solución: 2ºBach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 15)

Problema 2 Sesión 4 (nivel medio) En un festival gastronómico gaditano se han vendido entradas para tres eventos culinarios. Concretamente, 120 entradas para un taller de repostería, 50 para una demostración de cocina gourmet y 150 para una cata de vinos de la tierra de Cádiz. El total recaudado por la venta de entradas ha sido de 6.460€. Se sabe que el precio de 10 entradas para el taller de repostería coincide con el coste de la suma de 2 entradas para la cata de vinos y 1 entrada para la demostración de cocina gourmet. Además, el coste de 2 entradas para el taller y 1 entrada para la cata de vinos supera en 6 euros al de 2 entradas para la demostración de cocina gourmet. ¿Cuánto cuesta la entrada de cada evento?

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 16)

Problema 3 Sesión 4 (nivel avanzado) Juan ha gastado 80 euros por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57 euros, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 17)

Problema 4 Sesión 4 (nivel avanzado) Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

- El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.
- El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.
- El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

(solución: 1ºBach – Tema 4 – Apartado 11 – Ejercicio 6)

SESIÓN 5. Vectores. Dependencia e independencia lineal. Producto escalar. Ángulo entre vectores

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 1Bach - Vectores - Cap 6 "Producto escalar"

https://www.youtube.com/watch?v=D3hV4Q4I_cg

Mates 1Bach - Vectores - Cap 11 "Rango de vectores 3D en función de un parámetro"

https://www.youtube.com/watch?v=TL-9_Jl8ecs

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Taller Geogebra: Estudio del paralelogramo

https://www.geogebra.org/m/kyvrz9f5#material/fbfztrx6

Un conjunto de vectores es linealmente independiente entre sí cuando ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros. La forma más práctica para determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente es calcular el rango de esos vectores:

- Escribimos los vectores en forma matricial. Da igual si escribimos los vectores como filas o como columnas.
- Tendremos una matriz de m filas y n columnas: matriz $m \times n$. Si intercambiamos filas con columnas, tendremos una matriz $n \times m$. Podemos trabajar con cualquiera de las dos configuraciones ($m \times n$ o $n \times m$). Pero si trabajamos con la matriz que tenga el menor número de filas posibles, podremos aplicar de manera más eficiente el método de Gauss por debajo de la diagonal principal.
- La forma de aplicar Gauss a la matriz formada por los vectores es idéntica a la que estudiamos en sistemas de ecuaciones, con la salvedad que ahora no tenemos ecuaciones, sino que tenemos vectores. Por lo tanto, no hablaremos de absurdos matemáticos. Tampoco hablaremos de ecuaciones ni de incógnitas, sino que hablaremos de filas y de columnas. Y tampoco hablaremos de sistema, sino de matriz.
- Podemos intercambiar filas entre sí, y también podemos intercambiar columnas entre sí. Además, cuando trabajamos con vectores en forma matricial, las transformaciones lineales se pueden aplicar tanto a las filas como a las columnas.
- Tras terminar el método de Gauss, y eliminar las filas proporcionales, el rango de la matriz coincide con el número de filas con al menos un coeficiente a_{ij} distinto de 0.
- Si aparece un parámetro inicial k, podemos estudiar el rango de la matriz en función de los valores de ese parámetro, de forma semejante a como lo hacíamos con los sistemas de ecuaciones.

Si el rango de la matriz de vectores coincide con el número de vectores, diremos que todos los vectores son linealmente independientes. En caso contrario, serán linealmente dependientes. El rango de un conjunto de vectores coincide con el número de vectores que son linealmente independientes entre sí.

Si un conjunto de vectores no es linealmente independiente, diremos que los vectores están en combinación lineal (sistema ligado). Un conjunto de vectores está en combinación lineal si al menos uno de los vectores se puede expresar en función del resto de vectores: $\vec{u} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} + c \cdot \vec{t} + \dots$ Si al menos uno de los coeficientes a, b, c, … es distinto de cero, diremos que los vectores están en combinación lineal.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales si cumplen $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z} = \dots = k \epsilon \mathcal{R}$. Si k es positivo, los vectores proporcionales son paralelos. Si k es negativo, los vectores proporcionales son opuestos (antiparalelos).

- $Definición\ del\ producto\ escalar$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$
- $Vectores\ unitarios\ paralelos\ a\ los\ ejes\ (base\ canónica)$: $\hat{\imath} = (1,0,0,\dots), \hat{\jmath} = (0,1,0,\dots), \hat{k} = (0,0,1,\dots), \dots$
- $Vector\ expresado\ en\ función\ de\ la\ base\ canónica$: $\vec{u}(u_x, u_y, u_z, \dots) = u_x \cdot \hat{\imath} + u_y \cdot \hat{\jmath} + u_z \cdot \hat{k} + \cdots$
- $Fórmula\ analítica\ del\ producto\ escalar$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cdots$
- $Coseno\ del\ angulo\ entre\ dos\ vectores$: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z + \cdots}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- $Dos\ vectores\ no\ nulos\ son\ perpendiculares\ si\ y\ solo\ si\ su\ producto\ escalar\ es\ nulo$.

Problema 1 Sesión 5 (nivel inicial) Determinar los valores de k que hacen linealmente independientes los siguientes vectores: $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1, k+1, 1)$, $\vec{w} = (1,1, k+1)$

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 10 – Ejercicio 7)

Problema 2 Sesión 5 (nivel inicial) Dados $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (2,0,1)$ y $\vec{w} = (-1,1,1)$ del espacio vectorial $(V^3, +, \cdot)$ expresa el vector $\vec{t} = (5,-3,-2)$ como combinación lineal de los otros tres.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 9 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 5 (nivel medio) Determina todos los vectores $\vec{u} = (a, 0, b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares al vector $\vec{v} = (-1,0,1)$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 7 – Ejercicio 12)

Problema 4 Sesión 5 (nivel avanzado) Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$ y $C(-1,2,0)$. Calcula el área del triángulo de vértices $A, B\ y\ C$.

(solución: 1º Bach – Tema 5 – Apartado 15 – Ejercicio 1)

SESIÓN 6. Geometría plana: recta y circunferencia

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 1Bach - Geometría plana - Cap 4 primera parte "Mediatriz de un segmento" https://www.youtube.com/watch?v=Y4ayyBrLUo0

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: ¿Cuántos cheetos entran en el plato? https://estimation180.com/day-207

En dos dimensiones, dado un punto $A(x_A\,, y_A)$ y un vector director $\vec{u} = (u_x,\ u_y)$ podemos afirmar:

- $Ecuación\ vectorial\ de\ la\ recta\ r\ en\ dos\ dimensiones: (x, y) = (x_A\,, y_A) + k \cdot (u_x\,, u_y)\ \ con\ \ k \epsilon \mathcal{R}$
- $La\ pendiente\ de\ la\ recta\ coincide\ con\ la\ pendiente\ del\ vector\ director: m_r = m_{\vec{u}} = \frac{u_y}{u_x}$
- $Ecuación\ paramétrica: \begin{cases} x = x_A + k \cdot u_x \\ y = y_A + k \cdot u_y \end{cases}$
- $Ecuación\ continua\ o\ cartesiana: \frac{x - x_A}{u_x} = \frac{y - y_A}{u_y}$
- $Ecuación\ general: A\,x + B\,y + C = 0$
- $Ecuación\ explícita: y = m\,x + n\ con\ m \equiv pendiente\ y\ n \equiv ordenada\ en\ el\ origen$
- $Ecuación\ punto - pendiente\ de\ la\ recta: m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$
- $Ecuación\ de\ la\ recta\ que\ pasa\ por\ dos\ puntos\ A\ y\ B: \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$
- $Ecuación\ canónica\ o\ segmentaria: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\ \ con\ (a, 0)\ corte\ con\ eje\ OX\ y\ con\ (0, b)\ corte\ con\ el\ eje\ OY$
- $Si\ r \parallel s \Rightarrow m_r = m_s$
- $Si\ r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$

Un punto arbitrario de una recta es aquel punto que representa a todos los puntos de la recta. ¿Cómo se escribe el punto arbitrario? Colocando en las coordenadas del punto las ecuaciones paramétricas de la recta.

- $Punto\ arbitario\ de\ la\ recta\ r: A(x_A + k \cdot u_x\,, y_A + k \cdot u_y)$

La proyección ortogonal de un punto $P(x_P, y_P)$ sobre una recta $: A\,x + B\,y + C = 0$ implica obtener el punto de corte A de la recta s con la recta r, siendo la recta s perpendicular a r y que pasa por el punto P. La distancia de P a la proyección ortogonal A da como resultado la distancia del punto P a la recta r.

- $Distancia\ de\ un\ punto\ P\ a\ una\ recta\ r: d(P, r) = \left|\frac{A \cdot x_P + B \cdot y_P + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$

La recta mediatriz de un segmento formado por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ es una recta que pasa por el punto medio del segmento y cuyo vector director es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$. Dados dos puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ el punto medio de su segmento se obtiene como la semisuma de sus componentes:

- $Dado\ un\ segmento\ \overline{AB}\ su\ punto\ medio\ es: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

También podemos definir la mediatriz de un segmento formado por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan (igual distancia) de los extremos del segmento.

Una circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos del plano $P(x, y)$ cuya distancia a un centro fijo $C(x_0, y_0)$ es constante e igual al radio. La ecuación general de la circunferencia centrada en el punto $C(x_0, y_0)$ y radio r es:

- $Ecuación\ general\ de\ la\ circunferencia: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Problema 1 Sesión 6 (nivel inicial)

Dadas las rectas $r: ax - 2y + 7 = 0$ y $s: \frac{x+1}{b} = \frac{y}{2}$, hallar a y b sabiendo que las rectas son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(-1, 2)$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 6 (nivel inicial)

Halla la distancia del punto $P(1,0)$ a la recta $r: \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

SESIÓN 7. Geometría plana: recta y circunferencia (continuación)

Problema 1 Sesión 7 (nivel medio)

Dado el segmento de extremos $A(-7,3)$ y $B(5,11)$, halla la ecuación de su mediatriz.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 7 (nivel avanzado)

Halla el punto simétrico de $A(1,1)$ respecto de la recta $r: x - 3y - 12 = 0$.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 7 (nivel medio)

Sea la recta $r: x + 2y - a = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. Estudiar en función del parámetro a la posición relativa de la recta con la circunferencia.

(solución: 1º Bach – Tema 6 – Apartado 11 – Ejercicio 3)

SESIÓN 8. Estadística: parámetros unidimensionales y distribución binomial

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 2Bach - Estadística - Cap 1 "Introducción a la estadística" https://www.youtube.com/watch?v=aZRzTiDCYdQ

Mates 2Bach - Estadística - Cap 2 "Variable aleatoria discreta. Distribución binomial"

https://www.youtube.com/watch?v=Ic9f8drN-S8

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: En 4ºESO, Maristas ofrece 6 optativas de 3 horas semanales: Física y Química, Biología y Geología, Francés, Tecnología, Economía y Expresión Artística. Los alumnos deben elegir 3 optativas. ¿Cuáles y cuántas son todas las combinaciones de asignaturas que puede escoger el alumnado?

En una variable estadística X de una población de tamaño N, obtendremos el valor medio de la variable con:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i}{N}$$

Siendo x_i los valores concretos que toma la variable estadística, y siendo n_i las frecuencias absolutas (repeticiones) de cada uno de los valores concretos x_i. Para determinar lo bien o mal que funciona la media como representante de los valores x_i , debemos estudiar parámetros de dispersión. Por ejemplo, la varianza:

$$\sigma^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

Donde el factor $f_i = \frac{n_i}{N}$ se conoce como frecuencia relativa. La raíz cuadrada de la varianza es la desviación típica:

$$\sigma = s = \sqrt{s^2}$$

Si tomamos todas las muestras posibles de tamaño n dentro de una población de tamaño N, la media de las medias de las muestras coincide con la media de la población; mientras que la desviación de las medias de las muestras coincide con la desviación de la población dividido por la raíz cuadrada del tamaño de las muestras.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Supongamos un experimento donde se realizan n ensayos idénticos. Cada ensayo es independiente de los demás. Cada ensayo tiene solo dos resultados posibles: éxito o fracaso. La probabilidad de éxito se denomina p y es constante durante todo el experimento. Por lo tanto, la probabilidad de fracaso será $1-p$ (aquí la probabilidad viene expresada en tanto por uno). A este tipo de experimentos se les denomina experimento binomial.

Si X es una variable aleatoria discreta que indica el número de éxitos obtenidos en un experimento binomial, diremos que X es una variable aleatoria binomial $B(n,p)$. El valor n indica el número de ensayos realizados. El valor p indica la probabilidad de éxito en cada ensayo.

La probabilidad de que en n ensayos encontremos k éxitos de la variable discreta binomial X se conoce como función de probabilidad binomial o función de probabilidad de la distribución binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$donde \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

La función de distribución binomial acumula la probabilidad para valores iguales o inferiores a k éxitos:

$$F(k) = P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k)$$

Media o esperanza matemática para la Binomial $B(n,p)$: $\mu = n \cdot p$

Varianza en la Binomial: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$

Desviación típica en la Binomial: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$

Problema 1 Sesión 8 (nivel inicial)

Dada la población $\{-3,-1,2,5,7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 10)

Problema 2 Sesión 8 (nivel inicial)

Tiramos cinco veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 caras y 3 cruces?

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 8 (nivel inicial)

Se sabe que la probabilidad de que un dardo impacte en una diana es 0,4. Si se lanzan 9 dardos, determina:

a) ¿Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de dardos que dan en la diana?

b) Calcula la media y la desviación típica, y la probabilidad de que al menos 5 dardos impacten en la diana.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 6 – Ejercicio 11)

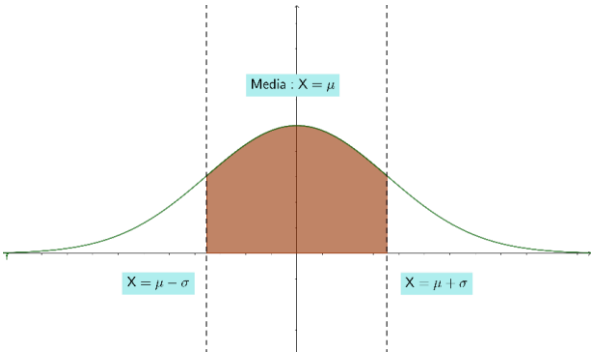
SESIÓN 9. Estadística: distribución gaussiana

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 2Bach – Mates 2Bach - Estadística - Cap 3 "Variable aleatoria continua. Distribución normal o gaussiana" https://www.youtube.com/watch?v=Ao7hjpPWj9E

Mates 2Bach - Estadística - Cap 4 "ejercicios resueltos sobre distribución normal o gaussiana" https://www.youtube.com/watch?v=4p9Rsre1S6c

---

Una variable aleatoria continua X se dice que sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ de media μ y desviación típica σ si los valores posibles de la variable ocupan toda la recta real (desde $-\infty$ hasta $+\infty$) y la gráfica de la distribución normal toma la forma de la conocida campana de Gauss. La gráfica de la curva gaussiana es simétrica respecto al valor medio μ (la media coincide con la mediana). Muchas variables aleatorias se pueden aproximar a esta forma (peso de una población de una determinada edad, altura de las personas de un curso, etc.).



Esta distribución normal ha sido tan estudiada a lo largo de los años que existen tablas con los valores acumulados para diferentes intervalos. Para usar estas tablas necesitamos convertir la distribución $N(\mu,\sigma)$ en una distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $N(0,1)$. Este proceso se conoce como tipificar la variable. ¿Cómo pasar de $N(\mu,\sigma)$ a $N(0,1)$? Definiendo una nueva variable aleatoria que llamaremos variable normalizada o tipificada:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

En variable continua la probabilidad de que Z tome un valor concreto k es prácticamente 0, debido al gran número de valores posibles para Z. Por eso, en variable continua, la tabla tipificada no da el valor $P(Z=k)$ sino que da el valor acumulado $P(Z \leq k)$ a la izquierda de $Z=k$.

Problema 1 Sesión 9 (nivel inicial)

En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23º y desviación típica 5º. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21º y 27º.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

Problema 2 Sesión 9 (nivel inicial)

Los desajustes sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos, sigue una ley Normal con media 0 y desviación típica 2.2. Calcule el porcentaje de trenes que tienen un desajuste máximo de un minuto.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 9 (nivel medio)

La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es de 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponemos que los pesos se distribuyen normalmente. Hallar cuántos estudiantes pesan:

a) Entre 60 kg y 70 kg.

b) Más de 90 kg.

c) Menos de 64 kg.

d) Exactamente 64 kg.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 14)

Problema 4 Sesión 9 (nivel avanzado)

Los resultados de un examen tienen una media de 78 y desviación típica 36. Se supone distribución normal.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se presente al examen y obtenga al menos una puntuación igual a 72?

b) Se declaran como "No Aptos" el 25% de los alumnos con las notas más bajas. ¿Qué proporción de estudiantes obtiene en su examen una nota que supera en al menos 5 puntos a la nota que marca la frontera entre "No Apto" y "Apto"?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 11)

SESIÓN 10. Estadística: aproximación de la binomial a la gaussiana y muestreo estratificado

VIDEO DEL YOUTUBE RECOMENDADO (canal MG&3): Aproximación de una Binomial a una Normal. Estadística (Mates 2º Bach) https://www.youtube.com/watch?v=k1mFb1JvALY

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: La conjetura de Goldbach. Un problema de hace 300 años, aún no resuelto. https://www.youtube.com/watch?v=oCoSwIEDPeM

La distribución binomial (variable discreta) puede aproximarse a la normal (variable continua) si se cumplen las condiciones del Teorema central del límite. Si el tamaño de la población n es muy grande (mayor o igual a 30) y la probabilidad p no se acerca ni a 0 ni a 1, podemos aproximar la distribución normal $B(n,p)$ a una distribución normal $N(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)})$. Esta aproximación es válida si:

$$n \geq 30$$
$$n\cdot p \geq 5$$
$$n\cdot(1-p) \geq 5$$

Además, al pasar de variable discreta a continua, debemos tener en cuenta que dos valores discretos consecutivos están separados por una unidad. Al pasar a variable continua asumimos, por ejemplo, que el valor 3 incluye el intervalo [2.5, 3.5], o que el valor 20 incluye el intervalo [19.5, 20.5]. Así la variable discreta "llena" por completo el hueco que existe entre dos valores discretos consecutivos. Esto provoca que, en la aproximación de la binomial a la gaussiana, debamos tener en cuenta la corrección de Yates:

$$P(X=a)\ en\ binomial\ \approx P(a-0.5\leq X\leq a+0.5)\ aproximación\ a\ gaussiana\ con\ corrección\ de\ Yates$$
$$P(X\leq a)\ en\ binomial\ \approx P(X\leq a+0.5)\ aproximación\ a\ gaussiana\ con\ corrección\ de\ Yates$$
$$P(X\geq a)\ en\ binomial\ \approx P(X\geq a-0.5)\ aproximación\ a\ gaussiana\ con\ corrección\ de\ Yates$$
$$P(a\leq X\leq b)\ en\ binomial\ \approx P(a-0.5\leq X\leq b+0.5)\ aproximación\ a\ gaussiana\ con\ corrección\ de\ Yates$$

Un muestreo aleatorio simple significa que los n individuos de la muestra se eligen al azar, con reemplazamiento. De esta forma, todos los individuos tienen la misma probabilidad de ser elegidos, independientemente de qué individuo se elija el primero o el último.

Un muestreo estratificado ocurre cuando los N individuos de la población se organizan en diversos grupos (o estratos) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. En cada estrato contamos con $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$ individuos. De tal forma que se cumple:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_k$$

Si elegimos de la población de tamaño N una muestra de tamaño n, el número de individuos $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ de cada estrato dentro de la muestra se deben elegir de manera proporcional. Es decir:

$$\frac{N}{n}=\frac{N_1}{n_1}=\frac{N_2}{n_2}=\frac{N_3}{n_3}=\dots=\frac{N_k}{n_k}$$

Problema 1 Sesión 10 (nivel medio)

En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono fijo en casa. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya más de 30 con teléfono fijo.

(solución: 1º Bach – Tema 7 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 10 (nivel medio)

En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una opción correcta y una opción incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 preguntas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 9)

Problema 3 Sesión 10 (nivel inicial)

Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 10)

Problema 4 Sesión 10 (nivel medio)

Según estudios de marketing, se estima que el 20% de las personas que ven un determinado anuncio terminan contratando el servicio anunciado. Para analizar más en profundidad la efectividad de la campaña de publicidad, se seleccionan aleatoriamente a 20 personas que han visto el anuncio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 10 personas contraten el servicio? ¿Y que lo hagan al menos 2?

b) Determine el valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas.

c) ¿Cuántas personas, de entre las que han visto el anuncio, se deberían seleccionar para que el número esperado de personas que contraten el servicio sea mayor o igual a 13?

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 9)

SESIÓN 11. Funciones: dominio, primeras indeterminaciones y continuidad

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre dominio de funciones del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=NZwqGK0p5HM&list=PL7rSsPjq_5KGTiW6LjmYd6LTDHoYD7Mb1

Lista de reproducción sobre límites, indeterminaciones, continuidad y asíntotas del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=U_DFaqrNIUo&list=PL7rSsPjq_5KExs1YUrZS5kfraI1B09dpJ

Una función de variable real $f(x)$ necesita de un dominio de definición, que son los valores de la variable real x que pueden ser sustituidos en la ecuación de la función.

- El dominio de un polinomio es toda la recta real.
- El dominio de una suma, resta o producto de funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ es la intersección de los dominios de cada función: $Dom(f)\cap Dom(g)$.
- El dominio de un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la intersección de los dominios de cada función menos los valores que anulan al denominador: $Dom(f)\cap Dom(g)-\{x\in\mathcal{R}\ /\ g(x)=0\}$
- El dominio de la raíz cuadrada de una función $\sqrt{f(x)}$ implica resolver la inecuación $f(x)\geq 0$.
- El dominio del logaritmo de una función $\ln[f(x)]$ implica resolver la inecuación $f(x)>0$.

Una función es continua en su dominio si podemos dibujar la gráfica de la función sin levantar la mano del papel.

Preguntarnos por el límite de la función $f(x)$ cuando el valor de la variable x se acerca a x_0 significa conocer el valor de la imagen de la función al que tendemos conforme nos acercamos más y más (sin llegar a alcanzar) al valor x_0.

$$L=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Podemos acercarnos por la derecha (límite lateral derecho) o por la izquierda (límite lateral izquierdo) de x_0.

$$L^+=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\ ,\ L^-=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

¿Cómo calcular un límite? Lo más práctico es evaluar $x=x_0$ en la ecuación de la función. Si el resultado es un número real, hemos terminado y ese número real es el valor del límite. Pero si obtenemos una indeterminación, deberemos aplicar las técnicas de resolución de límites. En límites sobre cociente de polinomios, o con raíces cuadradas de polinomios, encontraremos las siguientes indeterminaciones:

- Indeterminación $\frac{k}{0}$ siendo k un valor real no nulo: No estamos dividiendo por 0, sino que el denominador "se acerca" a 0 tanto como queramos (sin llegar a ser nunca 0). En este caso, tendremos que calcular los límites laterales, que se dispararán a más o a menos infinito.
- Indeterminación $\frac{0}{0}$: En cociente de polinomios, factorizamos, simplificamos y evaluamos para resolver la indeterminación. Si aparecen raíces de polinomios, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la parte de la fracción que contiene a la raíz. Y tras aplicar el conjugado, tendremos que simplificar y evaluar.
- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: En cociente de polinomios, dividiremos por la máxima potencia de la variable. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces de polinomios, debemos tener en cuenta que, por ejemplo, la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2, en el infinito, se comporta como un polinomio de grado 1. Ya que, en el infinito, el comportamiento de un polinomio lo marca el término con el mayor grado (y la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2 se aproxima a un polinomio de grado 1 cuando x tiende a infinito).
- Indeterminación $\infty-\infty$: En fracciones de polinomios, aplicamos m.c.m. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces cuadradas, podemos multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión que contiene a la raíz. Para después, simplificar y volver a evaluar.

En límites cuando $x\to-\infty$ es bastante práctico cambiar en el límite $-\infty$ por $+\infty$ y cambiar en la función x por $-x$.

Para conocer la continuidad de una función en un punto concreto x_0 del dominio, como puede ser el punto frontera en una función definida a trozos, aplicamos las tres condiciones de continuidad en un punto:

- $\exists f(x_0)$
- $L^+=L^-=L\epsilon\mathcal{R}$
- $f(x_0)=L$

Problema 1 Sesión 11 (nivel inicial)

Razona de manera justificada el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$ b) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$ c) $f(x)=\frac{x}{\cos(x)}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 2 de Funciones – Ejercicio 3)

Problema 2 Sesión 11 (nivel inicial)

Determina a y b para que la función sea continua en los puntos frontera.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ si\ x<0 \\ a\,x+b \ si\ 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} \ si\ x>3 \end{cases}$$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 8 de Límites – Ejercicio 2)

SESIÓN 12. Funciones: asíntotas

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre dominio de funciones del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=NZwqGK0p5HM&list=PL7rSsPjq_5KGTiW6LjmYd6LTDHoYD7Mb1

Lista de reproducción sobre límites, indeterminaciones, continuidad y asíntotas del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=U_DFaqrNIUo&list=PL7rSsPjq_5KExs1YUrZS5kfraI1B09dpJ

Los candidatos a A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio, o los puntos frontera de los intervalos que definen al dominio. Deberemos estudiar los límites laterales y comprobar si al menos uno de ellos se dispara a más o a menos infinito. La A.V. es una recta vertical $x = x_0$ que no es atravesada por la función.

La A.H. estudia el comportamiento de la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.H. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.H. en $x \to -\infty$. La A.H. es una recta horizontal $y = k$ que cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = k \in \mathcal{R}$.

La A.O. es una recta con pendiente no nula a la que tiende la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.O. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.O. en $x \to -\infty$. La A.O. es una recta $y = m\,x + n$ donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - m\,x]$$

En cociente de polinomios, si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, tendremos A.H. Si el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, tendremos A.O.

En un resumen como este documento, no hay espacio para mostrar las gráficas de las funciones elementales más usuales en bachillerato (seno, exponencial, parábola, etc.). Pero sí dejo enlace a un conjunto de gráficas que es muy recomendable memorizar:

https://www.geogebra.org/m/rscebhak#material/w9ehemkc (1ºBach - Tema 8 – Apartado 1 de Funciones)

Problema 1 Sesión 12 (nivel inicial)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{1-2\,x^2}{x^2-1}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 10 de Límites – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 12 (nivel inicial)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 10 de Límites – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 12 (nivel medio)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{\sqrt{4\,x^2+1}}{2x+2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 10 de Límites – Ejercicio 5)

SESIÓN 13. Funciones: asíntotas (continuación)

Problema 1 Sesión 13 (nivel inicial)

Obtener los puntos de corte entre las parábolas $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 + 8$. Ayuda: Recuerda que los puntos de corte de la gráfica de dos funciones tienen una coordenada horizontal y una coordenada vertical (x, y).

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

Problema 2 Sesión 13 (nivel medio)

Resuelve explicando adecuadamente cada paso:

a) $\lim_{x\to+\infty}(8x - \sqrt{16x^2 + x - 3})$ b) Obtener el valor de a que cumple: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2 + ax} - 2x) = \frac{1}{3}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 5 de Límites – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 13 (nivel inicial)

El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x+7200}{2x+1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x = 0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

b) ¿Y dentro de dos años?

c) ¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 7 de Límites – Ejercicio 8 del PDF de problemas resueltos 7b)

Problema 4 Sesión 13 (nivel medio)

Sea $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$, donde a, b y c son números reales. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 2$, y que la gráfica pasa por el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 9 de Límites – Ejercicio 1)

SESIÓN 14. Funciones: definición formal, tabla de derivadas e interpretación geométrica

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: ¿Cómo podemos usar el logaritmo en base 10 para saber cuántas cifras tiene el número 99? ¿Y el número 101? ¿Y el número 999? ¿Y el número 1001?

La derivada es una medida del crecimiento de una función. Si la derivada de una función en un punto del dominio es positiva, implica que la función es estrictamente creciente en ese punto. Si la derivada es negativa, significa que la función es estrictamente decreciente en ese punto:

- $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ función estrictamente creciente en x_0
- $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ función estrictamente decreciente en x_0
- $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ punto crítico en x_0 (puede ser máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión)

La definición formal de derivada coincide con la Tasa de Variación Media cuando la anchura del intervalo (h) tiende a cero.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El valor de la derivada evaluada en un punto x_0 coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x_0 . Es decir:

$$m_{tangente} = f'(x_0)$$

Por lo tanto, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función en el punto x_0 es:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Función constante

$y(x) = k \rightarrow y'(x) = 0$

Función identidad

$y(x) = x \rightarrow y'(x) = 1$

Función potencia

$y(x) = x^n \rightarrow y'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$y(x) = [f(x)]^n \rightarrow y'(x) = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

Función raíz cuadrada

$y(x) = \sqrt{x} \rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y(x) = \sqrt{f(x)} \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Función inversa

$y(x) = \frac{1}{x} \rightarrow y'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$y(x) = \frac{1}{f(x)} \rightarrow y'(x) = \frac{-f\prime(x)}{[f(x)]^2}$

Función logaritmo

$y(x) = \ln(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{x}$

$y(x) = \ln[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)}$

$y(x) = \log_a(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$

$y(x) = \log_a[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)} \cdot \log_a(e)$

Función exponencial

$y(x) = e^x \rightarrow y'(x) = e^x$

$y(x) = e^{f(x)} \rightarrow y'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$y(x) = a^x \rightarrow y'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

$y(x) = a^{f(x)} \rightarrow y'(x) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$

Funciones trigonométricas

$y(x) = sen(x) \rightarrow y'(x) = \cos(x)$

$y(x) = sen[f(x)] \rightarrow y'(x) = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$

$y(x) = \cos(x) \rightarrow y'(x) = -sen(x)$

$y(x) = \cos[f(x)] \rightarrow y'(x) = -sen[f(x)] \cdot f'(x)$

$y(x) = tg(x) \rightarrow y'(x) = 1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$y(x) = tg[f(x)] \rightarrow y'(x) = (1 + tg^2[f(x)]) \cdot f'(x) = \frac{1}{\cos^2[f(x)]} \cdot f'(x)$

$y(x) = cotg(x) \rightarrow y'(x) = -1 - cotg^2(x) = \frac{-1}{sen^2(x)}$

$y(x) = cotg[f(x)] \rightarrow y'(x) = (-1 - cotg^2[f(x)]) \cdot f'(x) = \frac{-1}{sen^2[f(x)]} \cdot f'(x)$

$y(x) = arcosen(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y(x) = arcosen[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$

$y(x) = arcocos(x) \rightarrow y'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y(x) = arcocos[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$

$y(x) = arcotg(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$y(x) = arcotg[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$

Función potencial-exponencial

$y(x) = x^x \rightarrow y'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$

$y(x) = f(x)^{g(x)} \rightarrow y'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \ln[f(x)] \cdot g'(x) + g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x)$

Suma y diferencia de funciones

$y(x) = f(x) + g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x) + g'(x)$

La derivada de la suma es la suma de las derivadas

$y(x) = f(x) - g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x) - g'(x)$

La derivada de la resta es la resta de las derivadas

Producto de funciones

$y(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

La derivada del producto es la derivada del primero por el segundo sin derivar más el primero sin derivar por el segundo derivado.

Producto de constante por una función

$y(x) = k \cdot f(x), k \in \mathbb{R} \rightarrow y'(x) = k \cdot f'(x), k \in \mathbb{R}$

La derivada de una constante por una función, es igual a la constante por la derivada de la función.

Cociente de funciones

$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g\prime(x)}{[g(x)]^2}$

La derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo ello partido por el denominador al cuadrado.

Regla de la cadena para la derivación de la composición de funciones

$y(x) = f[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$y(x) = f[g[h(x)]] = f'[g[h(x)]] \cdot g'[h(x)] \cdot h'(x)$

Problema 1 Sesión 14 (nivel inicial)

Aplica la definición formal de derivada a $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 14 (nivel inicial)

Determina el punto de $f(x) = x^3 - x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 14 (nivel inicial)

Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ en $x = -2$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

SESIÓN 15. Funciones: definición formal, tabla de derivadas e interpretación geométrica (continuación)

Problema 1 Sesión 15 (nivel medio)

Determina en qué punto de la gráfica de $f(x) = 3\sqrt{6x}$, la recta tangente forma un ángulo de $45°$ con el eje de abscisas.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 4)

Problema 2 Sesión 15 (nivel avanzado)

Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 2$ que pasan por el punto $P(3, -5)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 9)

SESIÓN 16. Funciones: condición necesaria y suficiente de extremos relativos

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

Los puntos críticos son los puntos que anulan la primera derivada. Esta condición también se conoce como condición necesaria de extremo relativo:

$$x_0 \text{ es un punto crítico si } f'(x_0) = 0 \text{ (condición necesaria de extremo relativo)}$$

Los puntos críticos pueden ser máximos relativos (suaves), mínimos relativos (suaves) o puntos de inflexión.

Para discriminar si un punto crítico es un extremo relativo, aplicamos la condición suficiente de extremo relativo. Hay dos formas de aplicar a un punto crítico la condición suficiente de extremo relativo:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos críticos. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la primera derivada. Si hay cambio de signo en la derivada a la izquierda y a la derecha de un punto crítico, tendremos un extremo relativo.
    - Cambio de derivada positiva a derivada negativa, indica un máximo relativo (paso de creciente a decreciente).
    - Cambio de derivada negativa a derivada positiva, indica un mínimo relativo (paso de decreciente a creciente).
    - Si no hay cambio de signo en la derivada, es un punto de inflexión.
- Segunda forma: Calcular la segunda derivada y evaluarla en el punto crítico (forma recomendada para polinomios, porque son muy fáciles de derivar).
    - Segunda derivada negativa en el punto crítico, indica un máximo relativo.
    - Segunda derivada positiva en el punto crítico, indica un mínimo relativo.
    - Segunda derivada nula en el punto crítico, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

Problema 1 Sesión 16 (nivel inicial)

Sea $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Hallar los extremos relativos y la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x = e$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 2)

Problema 2 Sesión 16 (nivel medio)

Hallar los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 4)

Problema 3 Sesión 16 (nivel medio)

Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 5)

SESIÓN 17. Funciones: condición necesaria y suficiente de extremos relativos (continuación)

Problema 1 Sesión 17 (nivel inicial)

Sea $f(x) = (x-a)e^x$. Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en x=0.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 5)

Problema 2 Sesión 17 (nivel inicial)

Determina los valores $a,\ b\ y\ c$ de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para que tenga un mínimo relativo en $x = 2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1) = 2$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 17 (nivel medio)

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función polinómica que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Determinar $a,\ b,\ c$ y d. ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 6)

Problema 4 Sesión 17 (nivel medio)

9.44. Obtener a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ tenga en $x = 1$ un punto crítico que no es extremo relativo y que la gráfica pase por el punto (1, 1).

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 14)

Problema 5 Sesión 17 (nivel medio)

9.45. Obtener a, b y c para que la función $f(x) = \frac{a\,x^2+b}{x+c}$ tenga una A.V. en $x = 1$, una A.O. de pendiente 2 y un extremo local suave en el punto de abscisa $x = 3$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 17)

SESIÓN 18. Funciones: condición necesaria y suficiente de puntos de inflexión

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Encontrar un número de dos cifras que al dividirlo por el producto de sus dígitos dé 3 de cociente y al que, si se le añade 18, los dígitos quedan invertidos.

La segunda derivada es una medida de la curvatura (concavidad o convexidad) de una función:

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ función convexa ∪ en x_0
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ función cóncava ∩ en x_0
- $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ candidato a punto de inflexión en x_0 (no todos los puntos de inflexión son puntos críticos)

La condición necesaria de punto de inflexión es anular la segunda derivada:

$$x_0 \ es \ un \ \ candidato \ a \ punto \ de \ inflexión \ si \ f''(x_0) = 0 \ (condición \ necesaria \ de \ punto \ de \ inflexión)$$

También existen dos formas de aplicar a un candidato a punto de inflexión la condición suficiente de punto de inflexión:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos candidatos a puntos de inflexión. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la segunda derivada. Si hay cambio de signo en la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto candidato, tendremos un punto de inflexión.
    - Cambio de segunda derivada positiva a segunda derivada negativa, indica un punto de inflexión (paso de convexa a cóncava).
    - Cambio de segunda derivada negativa a segunda derivada positiva, indica un punto de inflexión (paso de cóncava a convexa).
    - Si no hay cambio de signo en la segunda derivada, no hay punto de inflexión.
- Segunda forma: Calcular la tercera derivada y evaluarla en el candidato a punto de inflexión (forma recomendada para polinomios, por ser fáciles de derivar).
    - Tercera derivada negativa en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de convexa a cóncava.
    - Tercera derivada positiva en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de cóncava a convexa.
    - Tercera derivada nula en el candidato, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

Problema 1 Sesión 18 (nivel medio)

Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura de $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 9 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 18 (nivel medio)

Sea $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la función en el punto de inflexión.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 9 – Ejercicio 3)

Problema 3 Sesión 18 (nivel medio)

Obtener a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ tenga en $x = 1$ un punto crítico que no es extremo relativo y que la gráfica pase por el punto $(1, 1)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 14)

SESIÓN 19. Funciones: condición necesaria y suficiente de puntos de inflexión (continuación)

Problema 1 Sesión 19 (nivel medio)

Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 7)

Problema 2 Sesión 19 (nivel avanzado)

Sea la función $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ definida en el dominio $[1, \infty)$. Estudia su crecimiento, su decrecimiento, su concavidad, su convexidad, sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 8b – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 19 (nivel avanzado)

Sea $P(x)$ un polinomio de grado tres, con extremo relativo en $(1,1)$ y punto de inflexión en $(0,5)$. Determinar la fórmula del polinomio.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Derivadas 9)

SESIÓN 20. Funciones: derivabilidad, regla de L'Hôpital, indeterminaciones 0 por infinito, 0 elevado a 0, infinito elevado a 0, y 1 elevado a infinito

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

Regla de L'Hôpital: En límites $L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con indeterminación $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, si existe el límite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ coincide con el límite de partida L. Si tras aplicar L'Hôpital dos veces de forma consecutiva, volvemos al límite de partida, significa que nuestro límite no puede ser resuelto con esta regla. Por ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

En indeterminaciones $0\cdot\infty$ buscamos convertir el límite en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital. Para ello, convertimos el límite en un cociente de funciones.

- Un ejemplo de cómo conseguir un cociente dentro de un límite, lo tenemos en $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0\cdot(-\infty)$. Si expresamos x como $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ tendremos $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$ y podremos aplicar L'Hôpital.

En indeterminaciones 0^0 , ∞^0 y 1^∞ razonamos de la siguiente manera:

- Aplicamos logaritmo neperiano a nuestro límite L de partida.
- Aplicamos la propiedad $\ln(a^b) = b\cdot\ln(a)$ para conseguir un producto dentro del límite.
- Resolvemos el nuevo límite que hemos obtenido.
- Al resultado final, le aplicamos exponencial (función inversa del logaritmo). Así tendremos el valor del límite de partida L.

Una función es derivable en un punto x_0 del dominio si la función es continua y suave en ese punto. Las tres condiciones de continuidad en un punto ya las hemos repasado. La condición de suavidad en un punto (por ejemplo, en el punto frontera de una función a trozos) es que las derivadas laterales sean iguales:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Si al calcular una derivada lateral obtenemos una indeterminación, no olvidemos que estamos ante un límite sobre la función derivada. Por lo que podemos aplicar las técnicas de resolución de límites.

Problema 1 Sesión 20 (nivel inicial)

Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln(x)}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 7)

Problema 2 Sesión 20 (nivel medio)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 9)

Problema 3 Sesión 20 (nivel medio)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)} = 1$, calcula los valores de a y b.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 15)

SESIÓN 21. Funciones: derivabilidad, regla de L'Hôpital, indeterminaciones 0 por infinito, 0 elevado a 0, infinito elevado a 0, y 1 elevado a infinito (continuación)

Problema 1 Sesión 21 (nivel avanzado)

Calcula: a) $\lim_{x\to\infty} x\left[arctg(e^x)-\frac{\pi}{2}\right]$ b) $\lim_{x\to-2}\left(\frac{x+3}{5+2x}\right)^{\frac{1}{x+2}}$ c) $\lim_{x\to1}[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 14 – Ejercicio 1) apartado a)

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 14 – Ejercicio 2) apartado b)

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 14 – Ejercicio 7) apartado c)

Problema 2 Sesión 21 (nivel medio)

Obtener b y c para que $f(x)=\begin{cases}x^2+b\,x+c\ \ si\ \ x\le 0\\ \frac{\ln(x+1)}{x}\ \ si\ \ x>0\end{cases}$ sea derivable en el punto frontera.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 15 – Ejercicio 17)

Problema 3 Sesión 21 (nivel medio)

Obtener a y b para que $f(x)=\begin{cases}a\cos(x)+2\,x\ \ si\ \ x\le 0\\ a^2\ln(x+1)+\frac{b}{x+1}\ \ si\ \ x>0\end{cases}$ sea derivable en el punto frontera.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 15 – Ejercicio 19)

SESIÓN 22. Funciones: problemas de optimización, diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos, estudio completo de una función

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: ¿Pará que valores de b la parábola $f(x) = 9x^2 + bx + 4$ corta una sola vez al eje de abscisas?

Ya hemos estudiado los extremos relativos (también llamados extremos locales): anulan la primera derivada (condición necesaria), cumplen la condición suficiente de extremo relativo, y sus picos y valles son suaves por ser la función derivable en esos puntos (no son puntos angulosos).

Los extremos absolutos son los que representan la imagen más grande de la función (máximo absoluto) o la imagen más pequeña de la función (mínimo absoluto). Si tenemos la gráfica de la función, es fácil detectar los extremos absolutos. El estudio completo de una función incluye: dominio, corte con los ejes, simetría, asíntotas, monotonía y extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión, dibujo de la gráfica.

No obstante, si nos piden detectar los extremos absolutos de una función $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ podemos razonar sin necesidad de realizar un estudio completo de la gráfica:

- Obtenemos el dominio y los extremos relativos que pertenezcan al intervalo $[a,b]$.
- Realizamos una tabla de valores de la imagen de $f(x)$ tanto en los extremos relativos como en el inicio (a) y en el final (b) del intervalo. La imagen más grande corresponderá al máximo absoluto en el intervalo. La imagen más pequeña indicará el mínimo absoluto en el intervalo.

En los problemas de optimización encontramos un enunciado del cual debemos obtener información para conseguir una función suave de una sola variable, que tendremos que optimizar (encontrar el valor del dominio que genera la imagen más grande o la imagen más pequeña). Debemos estudiar el dominio y buscar los extremos relativos de esa función y los extremos absolutos. Con frecuencia, en estos problemas aparece un único extremo relativo, por lo que es fácil razonar así: si solo aparece un extremo relativo en el dominio, ese extremo también será absoluto.

Problema 1 Sesión 22 (nivel inicial)

Obtener a, b y c para que la función $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ tengo un extremo absoluto en punto $(2,-4)$ y su segunda derivada en $x = 2$ valga 4.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 22 (nivel medio)

Obtener a, b y c para que la función $f(x) = \frac{a\,x^2+b}{x+c}$ tenga una A.V. en $x = 1$, una A.O. de pendiente 2 y un extremo local suave en el punto de abscisa $x = 3$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 17)

Problema 3 Sesión 22 (nivel medio)

Sea la función $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ definida en el dominio $[1,100]$. Obtener los extremos absolutos en el dominio.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 8b – Ejercicio 2)

SESIÓN 23. Funciones: problemas de optimización, diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos, estudio completo de una función (continuación)

Fórmulas más utilizadas en los problemas de optimización de Bachillerato:

- Perímetro de un polígono: $P = suma\ de\ los\ lados$
- Área del rectángulo: $A = base \cdot altura$
- Área del triángulo: $A = \frac{1}{2} \cdot base \cdot altura$
- Teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$
- Perímetro de una circunferencia: $P = 2 \cdot \pi \cdot r$
- Área de un círculo: $A = \pi \cdot r^2$
- Volumen de un cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Área de las caras de un cilindro (considerando dos tapaderas): $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
- Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
- Área de la superficie de una esfera: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
- Volumen de un cono: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Perímetro de un arco circular de ángulo α radianes: $P = \alpha \cdot r + 2 \cdot r$
- Área de un arco circular de ángulo α radianes: $A = \frac{\alpha}{2} \cdot r^2$
- Pasar de grados a radianes: $360° = 2\pi\ radianes$
- Velocidad media: $velocidad = \frac{espacio}{tiempo}$
- Si un objeto mide k unidades de longitud y su precio por unidad de longitud es p, el precio total es $k \cdot p$
- Si un objeto tiene k unidades cuadradas de superficie y su precio por unidad de área es p, el precio total es $k \cdot p$
- Distancia entre dos puntos A y B: $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Área que forma recta con los ejes de coordenadas si expresamos la recta en su forma canónica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot |b|$
- Coordenadas de un punto que pertenece a la gráfica de una función: $(x, f(x))$

Problema 1 Sesión 23 (nivel avanzado)

Sea una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 6 metros, calcula las dimensiones de la ventana para que entre la cantidad de luz máxima.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 16 – Ejercicio 3)

Problema 2 Sesión 23 (nivel avanzado)

Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 50 cm que tenga la mayor área posible.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 16 – Ejercicio 4)

Problema 3 Sesión 23 (nivel avanzado)

Una lata de refresco cilíndrica tiene un volumen de 333 centímetros cúbicos. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 16 – Ejercicio 5)

Problema 4 Sesión 23 (nivel avanzado)

Obtener las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas, con mayor área posible. Obtener el valor de dicha área máxima.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Optimización 1)

Problema 5 Sesión 23 (nivel avanzado)

Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Optimización 6)

SESIÓN 24. Funciones: problemas de optimización, diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos, estudio completo de una función (continuación)

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

Problema 1 Sesión 24 (nivel medio)

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 24 (nivel medio)

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=e^{-x^2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 8)

Problema 3 Sesión 24 (nivel medio)

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Estudiar Funciones 8)

SESIÓN 25. Funciones: problemas de optimización, diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos, estudio completo de una función (continuación)

Problema 1 Sesión 25 (nivel medio)

Obtener los extremos absolutos de $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2,4]$.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Estudiar Funciones 9)

Problema 2 Sesión 25 (nivel avanzado)

Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, aquella que forma con las partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Optimización 5)

Problema 3 Sesión 25 (nivel avanzado)

Sea un triángulo rectángulo de hipotenusa $90cm$. Haciéndolo girar alrededor de uno de sus catetos genera un cono. Obtener las dimensiones de los catetos para que el volumen del cono engendrado sea máximo.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Optimización 4)

Problema 4 Sesión 25 (nivel avanzado)

Obtener el punto de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$ a menor distancia del punto$P(5,0)$. Obtener dicha distancia mínima.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Optimización 2)

TEMA 2: AMPLIACIÓN CONTINUIDAD

SESIÓN 26. Inversa de una función

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Dominio de funciones radicales

https://www.youtube.com/watch?v=U7k9ww8dg8E

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Geogebra función exponencial como inversa de la función logaritmo

https://www.geogebra.org/m/n3uhymnf#material/qguqjsqr

Geogebra composición de funciones inversas

https://www.geogebra.org/m/mjtmjjmt#material/mgysdtww

Una función $f(x)$ admite inversa $f^{-1}(x)$ si la función es **biyectiva**. Para ser biyectiva, la función tiene que ser inyectiva y sobreyectiva.

Ser inyectiva es una propiedad del dominio de la función. Significa que dos valores distintos del dominio deben tener siempre imágenes distintas en la función.

Una forma geométrica de demostrar si una función es inyectiva es dibujar la gráfica de la función en el dominio que indique el problema y trazar rectas horizontales. Si cada recta corta, como máximo, una vez a la gráfica de la función, significa que $f(x)$ es inyectiva en ese dominio.

Ser sobreyectiva es una propiedad de la imagen de la función. Significa que cualquier valor de la imagen tiene siempre asociado un valor del dominio.

Para demostrar si una función es sobreyectiva, necesitamos definir la imagen maximal como la imagen más grande posible de la función. Si la imagen que indica el problema está contenida dentro de la imagen maximal, significará que la función es sobreyectiva.

La imagen de una función coincide con el dominio de la inversa. Y el dominio de una función coincide con la imagen de la inversa.

$$Dom(f(x)) = Im(f^{-1}(x))$$
$$Im(f(x)) = Dom(f^{-1}(x))$$

No todas las funciones admiten inversa. Si existe la inversa, se cumple la siguiente igualdad en la composición de funciones: $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$.

La gráfica de una función y la gráfica de su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante).

Ya hemos estudiado algunas parejas de funciones que son inversas entre sí: logaritmo y exponencial, seno y arcoseno, o parábola y raíz cuadrada. Un detalle sobre la parábola y la raíz cuadrada: La parábola es la inversa de la raíz cuadrada en el dominio $[0,+\infty)$, porque si consideramos toda la recta real como dominio de la parábola, la función parábola no sería inyectiva (y por lo tanto, no sería biyectiva y no tendría inversa).

Si existe la inversa, podemos calcular su ecuación con el siguiente razonamiento:

- Llamamos y a $f(x)$.
- De la ecuación de la función, despejamos la variable x .
- Realizamos el cambio siguiente: y pasa a llamarse x, mientras que x pasa a llamarse y.
- La nueva expresión obtenida para y será la función inversa $f^{-1}(x)$.

Problema 1 Sesión 26 (nivel inicial)

Indica un dominio que permita que la función $f(x) = \cos(x)$ admita inversa.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

Problema 2 Sesión 26 (nivel inicial)

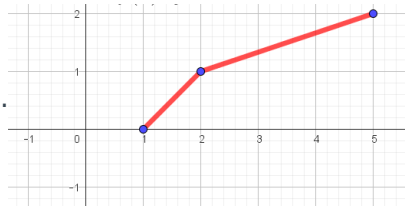
Realiza la composición $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$ de las siguientes funciones:

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

Problema 3 Sesión 26 (nivel inicial)

Dada la gráfica de $f(x)$ de la imagen derecha, obtener los valores de $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.



(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 2 – Ejercicio 7)

Problema 4 Sesión 26 (nivel medio)

Obtener la inversa de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y comprobar que la composición de la función con su inversa coincide con la función identidad.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 2 – Ejercicio 11)

SESIÓN 27. Ampliación de asíntotas

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Repaso de gráficas de funciones elementales. Geogebra proyectar gráficas para memorizar https://www.geogebra.org/m/rscebhak#material/w9ehemkc

---

Los candidatos a A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio, o los puntos frontera de los intervalos que definen al dominio. Deberemos estudiar los límites laterales y comprobar si al menos uno de ellos se dispara a más o a menos infinito.

Si una función está definida en el dominio cerrado $[a,b]$ o abierto (a,b) no tiene sentido preguntarse por el límite lateral a la izquierda de a ni por el límite lateral a la derecha de b, porque la función no está ahí definida.

En cociente de polinomios, si existe A.H. o A.O. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.H. o A.O. en $x \to -\infty$.

¡Ojo! Si no es un cociente de polinomios, hay que estudiar por separado la A.H. o A.O. tanto en $x \to +\infty$ como en $x \to -\infty$.

En cociente de polinomios, si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, tendremos A.H. En cociente de polinomios, si el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, tendremos A.O.

Una función $f(x)$ puede cortar a su A.H. o A.O. Para calcular los puntos de corte, igualamos la ecuación de la función con la ecuación de la asíntota.

Estudiar la posición relativa de una función respecto de su A.V. es simplemente estudiar los límites laterales para saber si la función se dispara a más o a menos infinito.

Estudiar la **posición relativa de una función respecto de su A.H. o A.O.** implica:

- Obtener los puntos de corte de la función con la asíntota.
- Situar en la recta real esos puntos de corte y los puntos que no pertenecen al dominio.
- Evaluar, en los intervalos que se forman en la recta real, la imagen de la función y la imagen de la asíntota.
- Donde la imagen de la función supere a la imagen de la asíntota, significa que la gráfica de la función queda por encima de la gráfica de la asíntota. Y viceversa.

Problema 1 Sesión 27 (nivel inicial)

Sea la función $f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)}$. Hallar los parámetros a y k sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x = 2$ es una A.V.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

Problema 2 Sesión 27 (nivel medio)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x^2+1}$

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 1 apartado b)

Problema 3 Sesión 27 (nivel medio)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 4)

SESIÓN 28. Ampliación de asíntotas (continuación)

Problema 1 Sesión 28 (nivel inicial)

Sea la función $g(x) = \frac{m\,x^3}{(x-n)^2}$. Hallar los parámetros m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la función.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 6)

Problema 2 Sesión 28 (nivel medio)

Sea $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$. Calcula el límite en el infinito de $x^2 \cdot f(x)$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 21)

Problema 3 Sesión 28 (nivel medio)

2.15. Estudiar la posición relativa de $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x^2-4}$ respecto de su A.H. ¿Corta alguna vez la función a la A.H.?

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

SESIÓN 29. Ampliación de asíntotas (continuación)

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Geogebra dominio en funciones con raíces y con logaritmos

https://www.geogebra.org/m/rscebhak#material/me8zsexu

Problema 1 Sesión 29 (nivel medio)

Estudia las asíntotas de $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 7)

Problema 2 Sesión 29 (nivel medio)

Estudia las asíntotas horizontales de $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 14)

Problema 3 Sesión 29 (nivel medio)

Sabemos que la gráfica de la función $f(x)=\frac{a\,x^2+b\,x+2}{x-1}$ tiene una A.O. que pasa por el punto (1, 1) y que tiene pendiente 2. Calcular a y b.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 19)

SESIÓN 30. Ampliación de asíntotas (continuación)

Problema 1 Sesión 30 (nivel medio)

Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} \ si \ x<-1 \\ a\,x+b \ si \ -1\le x<1 \\ \frac{x^2}{x+1} \ si \ x\ge 1 \end{cases}$ siendo a y b números reales.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 20)

Problema 2 Sesión 30 (nivel avanzado)

Calcula a sabiendo que $f(x)=\frac{a\,x}{[\ln(x)]^3+2x}$ tiene una A.H. en y=1.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 22)

Problema 3 Sesión 30 (nivel avanzado)

¿Existe A.H. o A.O. de $f(x)=x+\frac{1}{e^x}$ cuando x tiende a $+\infty$?

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 2 apartado a)

SESIÓN 31. Boceto de funciones

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 1Bach - Derivadas - Capítulo 17 "Estudio y representación de funciones" https://www.youtube.com/watch?v=rpxVJ9KNLGQ

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Geogebra traslación vertical y horizontal en funciones

https://www.geogebra.org/m/n3uhymnf#material/tak2ugne

Geogebra (Arturo Olivares Martos) estudio y representación de una parábola

https://www.geogebra.org/m/mjtmjjmt#material/hq88en9s

Problema 1 Sesión 31 (nivel inicial)

Sean las funciones polinómicas $f(x)=x^3+2$ y $g(x)=-x^2+2x+2$. Dibuja sus gráficas en el mismo sistema de referencia y calcula los puntos de corte entre ambas funciones.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 12)

Problema 2 Sesión 31 (nivel inicial)

Dibuja en el mismo sistema de referencia la gráfica de sen(x) y de cos(x) en el intervalo $[0\,,\pi/2]$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 7)

Problema 3 Sesión 31 (nivel medio)

El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t)=\frac{-t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde t=1 (lunes) hasta t=8 (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en qué día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 6)

Problema 4 Sesión 31 (nivel avanzado)

Haz un esbozo de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x} \;\; si \;\; x<0\\ 2x^3-15x^2+36x+3 \;\; si \;\; x\geq 0\end{cases}$ alrededor del punto frontera.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 4)

SESIÓN 32. Boceto de funciones (continuación)

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Boceto de cociente de polinomios y determinar si es inyectiva en su dominio maximal https://www.youtube.com/watch?v=VjPO2KygtWo

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Geogebra valor absoluto en gráficas de funciones

https://www.geogebra.org/m/n3uhymnf#material/ejpu49ad

Problema 1 Sesión 32 (nivel inicial)

Representa $f(x) = |-x^2 - 2x + 3|$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 32 (nivel medio)

Representar sobre una misma gráfica las funciones $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Obtener los puntos de corte de ambas funciones.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 5)

Problema 3 Sesión 32 (nivel avanzado)

Dibuja la gráfica de $f(x) = x \cdot |x - 1|$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 14)

Problema 4 Sesión 32 (nivel avanzado)

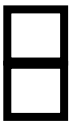
Estudia la continuidad y los tipos de discontinuidad de la función en los puntos frontera.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & si \ -3 < x < 0 \\ x^2 + 1 & si \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1} & si \ 1 < x < 5 \end{cases}$$

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

SESIÓN 33. Ampliación de límites

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Imagina un ser vivo inmortal que, en un día, pasa de estado cría a estado adulto. Un cuadrado blanco simboliza a la cría. Y la unión de dos cuadrados blancos representa al adulto.

Cría	Adulto
	

Cuando un ser vivo se convierte en adulto, al día siguiente genera una nueva cría. Los adultos siguen generando nuevas crías cada día de vida. Recuerda que es un ser vivo inmortal. Con estas sencillas reglas, ¿cómo crece la población de seres vivos?

Supongamos que el 1 de enero colocamos una sola cría en un hábitat favorable para su desarrollo. El 2 de enero la cría se convierte en adulto. El 3 de enero, el adulto genera una cría. El 4 de enero, el primer adulto sigue generando una nueva cría, mientras que la cría del 3 de enero se convierte en el segundo adulto.

La siguiente tabla muestra el número de seres vivos cada día. ¿Cuántos seres vivos habrá el 7 de enero? ¿Eres capaz de deducir una fórmula que dé el número de seres vivos de un día, a partir del dato de cuántos seres vivos hay en días anteriores?

Fecha	Número de seres vivos
día 0 (31 de diciembre)	0
día 1 (1 de enero)	1
día 2	1
día 3	2
día 4	3
día 5	5
día 6	8
día 7	¿?

Los límites con indeterminación 1^{∞} se pueden resolver, además de la forma que aprendimos en 1ºBachillerato y que hemos repasado en el Tema 1 del presente curso, con la siguiente expresión que demostraremos en clase:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} \rightarrow L = e^{\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot [f(x) - 1]}$$

Problema 1 Sesión 33 (nivel medio)

Calcula $\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt{x^2 - 5x + 4} - x\right]$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 5)

Problema 2 Sesión 22 (nivel medio)

Calcula $\lim_{x \to 1^+} \left[\frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x^2 - 1}\right]$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 9)

Problema 3 Sesión 33 (nivel medio)

Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln[\cos(x)]}$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 15)

Problema 4 Sesión 33 (nivel avanzado)

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$ b) Determinar el valor de a para que $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{a \cdot x}$ sea igual al número e

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{3\, e^{x^2} - e^x + x^3}{x^4 + e^x - 2\, e^{x^2}}$ d) $\lim_{x \to 1^+} (2 - x)^{\frac{1}{1-x}}$

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicios 2 (apartados a y c), 3 (apartado b) y 6 (apartado d)

SESIÓN 34. Teorema de Bolzano

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 2Bach - Scratch y Teorema de Bolzano - Ampliación a continuidad de funciones https://www.youtube.com/watch?v=PT6k-CbAdWU

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Geogebra método recursivo para aplicar el Teorema de Bolzano https://www.geogebra.org/m/mjtmjjmt#material/tsvkwf9d

Geogebra sudoku 4x4 de gráfica de funciones

https://www.geogebra.org/m/mjtmjjmt#material/eg8aprmr

El Teorema de Bolzano garantiza la existencia de al menos una solución de una ecuación dentro de un intervalo.

Por ejemplo:

$$¿\,Resolver\ \ e^x = -x\ \ en\ el\ intervalo\ [-1{,}0]?$$

El ejemplo anterior es equivalente a obtener los cortes de una función con el eje horizontal. En efecto, si hacemos:

$$e^x = -x \rightarrow e^x + x = 0$$

$$Llamamos\ \ f(x) = e^x + x$$

$$¿\,Resolver\ \ f(x) = 0\ \ en\ el\ intervalo\ [-1{,}0]?$$

$$Igualar\ f(x)\ a\ 0\ implica\ obtener\ los\ cortes\ de\ la\ función\ con\ el\ eje\ de\ abscisas$$

¿Qué dice el Teorema de Bolzano?

- Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$.
- Si el signo de la imagen de $f(x)$ en a es distinto al signo de la imagen de $f(x)$ en b. Es decir: $f(a)\cdot f(b) < 0$.
- Entonces, existe al menos un valor del interior del intervalo donde la imagen de $f(x)$ se anula. O lo que es lo mismo, que la gráfica de la función corta el eje horizontal: $\exists\, c \in (a,b) / f(c) = 0$.

¡Importante! El valor c pertenece al intervalo abierto (a,b), no al cerrado, porque inicialmente hemos comprobado que la función $f(x)$ no se anula ni en $x = a$ ni en $x = b$.

Aplicando Bolzano de manera reiterada podemos mejorar, poco a poco, la precisión de la solución obtenida. Si vamos tomando intervalos cada vez más pequeños, encajados dentro del intervalo inicial $[a,b]$, podemos obtener la solución con precisión de una cifra decimal, o dos cifras decimales, etc.

Problema 1 Sesión 34 (nivel medio)

Utiliza el Teorema de Bolzano para demostrar que las gráficas de las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = -x$ se cortan al menos una vez en el intervalo [-1, 0]. Encontrar dicha solución con precisión de una cifra decimal.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 10 – Ejercicio 2)

Problema 2 Sesión 34 (nivel medio)

Demuestra que la función $f(x) = x^3 - \ln(x) - 5$ corta al menos una vez al eje horizontal en el intervalo (1, 2).

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 11 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 34 (nivel medio)

Demuestra que la función $f(x) = \sqrt{x} - e^x + 2$ corta al menos una vez al eje horizontal en el semieje positivo de abscisas.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 11 – Ejercicio 3)

TEMA 3: AMPLIACIÓN DERIVABILIDAD

SESIÓN 35. Relación entre la gráfica de la derivada y la gráfica de la función original

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problema 9.39. Estudiar gráfica de la función derivada https://www.youtube.com/watch?v=0EtnwgI8SLE

Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problemas 9.33-9.34. Recta tangente y normal. Extremos absolutos

https://www.youtube.com/watch?v=bQejYDXz6X8

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Turning to Calculus (nrich)

https://nrich.maths.org/problems/turning-calculus

De la **gráfica de la función derivada** podemos obtener información de la gráfica de la función original:

- Los cortes x_0 de la gráfica de la derivada con el eje horizontal son los puntos críticos de $f(x)$.
  - Si el corte atraviesa al eje de abscisas de arriba abajo, tendremos un máximo relativo en x_0.
  - Si el corte atraviesa al eje de abscisas de abajo arriba, tendremos un mínimo relativo en x_0.
  - Si el corte no atraviesa al eje de abscisas, tendremos un punto de inflexión.
- Los extremos relativos de la gráfica de la derivada son los puntos de inflexión de $f(x)$.

La expresión "pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0" es sinónima de "valor de la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0". Es decir:

$$m_t = f'(x_0)$$

Por lo tanto, si deseamos **optimizar la pendiente de la recta tangente es lo mismo que optimizar la función derivada**. Es decir, los máximos y los mínimos de la pendiente de la recta tangente son los máximos y los mínimos de la función derivada. Conclusión: **los máximos y los mínimos de la pendiente de la recta tangente son los puntos de inflexión de la función original $f(x)$** .

Un máximo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más grande de todas.

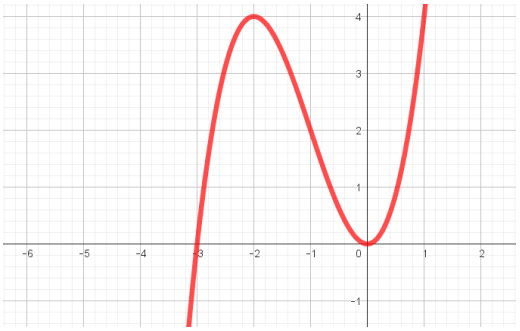
Un mínimo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más pequeña de todas.

Para obtener los extremos absolutos de una función en toda la recta real o en un dominio formado por un intervalo abierto, tendremos que hacer un boceto de la gráfica en el dominio que nos han dado. Pero si nos piden **estudiar los extremos absolutos en un intervalo cerrado** $[a,b]$, podemos razonar así:

- Calcular los extremos relativos (condición necesaria y condición suficiente).
- Obtener la imagen de los extremos relativos, la imagen de $x=a$ y la imagen de $x=b$.
- Decidir los extremos absolutos comparando el valor de estas imágenes calculadas.

Problema 1 Sesión 35 (nivel medio)

La gráfica de la imagen de la derecha muestra la gráfica de la función derivada $f'(x)$. Obtener la monotonía, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.



(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 35 (nivel avanzado)

Determina el punto de la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 35 (nivel avanzado)

Sea $f(x)=\frac{x}{e^x}$. Determina el punto de la gráfica que minimiza la pendiente de la recta tangente.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

SESIÓN 36. Repaso de recta tangente a una función en un punto. Repaso de extremos relativos.

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problemas del 9.18 al 9.22. Interpretación geométrica derivada https://www.youtube.com/watch?v=f5RHg03wong

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: The Sign of the Times (nrich) https://nrich.maths.org/problems/sign-times

---

Problema 1 Sesión 36 (nivel medio)

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa x=1. Determina si la curva queda por encima o por debajo de dicha recta tangente.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 36 (nivel medio)

Estudia la monotonía y los extremos relativos y absolutos de $f(x) = 2x + sen(2x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 36 (nivel medio)

¿Cuál debe ser el grado mínimo de un polinomio para que la gráfica de su función presente tres extremos relativos?

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 2)

SESIÓN 37. Repaso de las diferencias entre extremos relativos y extremos absolutos

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problemas 9.35-9.36. Optimización. Extremos relativos y absolutos https://www.youtube.com/watch?v=gv-ofxMvqSI

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Calculus Analogies (nrich)

https://nrich.maths.org/problems/calculus-analogies

Problema 1 Sesión 37 (nivel medio)

Estudia los extremos relativos y absolutos de $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 4)

Problema 2 Sesión 37 (nivel avanzado)

Sea $f:\left[\frac{1}{e},4\right]\to\mathcal{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)\ si\ \frac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \frac{x}{2}+1-\ln(2)\ si\ 2<x\leq 4 \end{cases}$. Hallar sus extremos absolutos.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 5)

Problema 3 Sesión 37 (nivel medio)

Sea la función $f(x)=x^2-8\ln(x)$ definida en el dominio $[1,\infty)$. Estudia su crecimiento, su decrecimiento, su concavidad, su convexidad, sus extremos relativos y sus extremos absolutos.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 7)

SESIÓN 38. Repaso de las diferencias entre extremos relativos y extremos absolutos (continuación)

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problema 9.40. Condiciones de contorno en función parabólica https://www.youtube.com/watch?v=075UwQST7qo

---

Problema 1 Sesión 38 (nivel medio)

Estudia los extremos relativos de $f(x) = x^2 - |x|$.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 10)

Problema 2 Sesión 38 (nivel avanzado)

Estudia la monotonía de $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 11)

Problema 3 Sesión 38 (nivel medio)

Sea $f(x) = (x - a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en x=0.

b) Para $a = 1$ calcula los puntos de inflexión de la función.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 12)

Problema 4 Sesión 38 (nivel avanzado)

Sea $f(x) = \begin{cases} 5x + 1 \ \ si \ \ -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) \ \ si \ \ 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$. Hallar los extremos relativos y absolutos.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 14)

SESIÓN 39. Problemas de optimización con enunciado contextualizado

---

Problema 1 Sesión 39 (nivel medio)

El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de forma que la suma de los valores de los dos rubíes formados sea mínima.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 40 (nivel medio)

Encontrar el punto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1}$ que se encuentre a la menor distancia del punto A(2, 0).

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 3)

Problema 3 Sesión 40 (nivel medio)

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea al mínimo posible.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 4)

SESIÓN 40. Problemas de optimización con enunciado contextualizado (continuación)

Problema 1 Sesión 40 (nivel avanzado)

Obtener las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas, con mayor área posible. Obtener el valor de dicha área máxima.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 5)

Problema 2 Sesión 40 (nivel medio)

Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $P(1,2)$, aquella que forma con las partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 7)

Problema 3 Sesión 40 (nivel avanzado)

Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N.

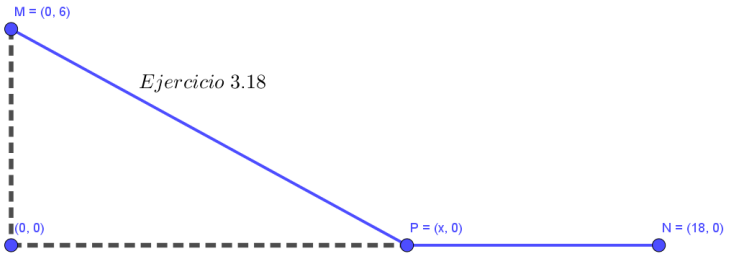
Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0,6)$, $P = (x,0)$ y $N = (18,0)$.

El cable MP tiene que ser más grueso, debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10€/m. El precio del cable PN es de 5€/m.

a) Obtener el coste C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \leq x \leq 18$.

b) Obtener el valor de x, con $0 \leq x \leq 18$, para que el coste total sea mínimo.

c) Calcular dicho coste mínimo.



(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 9)

SESIÓN 41. Problemas de optimización con enunciado contextualizado (continuación)

Problema 1 Sesión 41 (nivel inicial)

La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P = 2\,L\,K^2$ (en millones de unidades). Donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros).

La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+K?

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 11)

Problema 1 Sesión 41 (nivel avanzado)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 8 – Ejercicio 16)

SESIÓN 42. Teorema de Rolle

El **Teorema de Rolle garantiza la existencia de al menos un extremo relativo dentro de un intervalo**.

¿Qué dice el Teorema de Rolle?

- Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. Aquí el intervalo es cerrado.
- Sea $f(x)$ una función derivable (suave) en el intervalo (a,b) . Fíjate que la condición de suavidad no incluye a los extremos del intervalo, por eso hablamos de suavidad en un intervalo abierto.
- Si se cumple que $f(a)=f(b)$.
- Entonces, existe al menos un valor del interior del intervalo donde la derivada $f(x)$ se anula, porque deberá alcanzarse un máximo suave o un mínimo suave para garantizar que las imágenes $f(a)$ y $f(b)$ sean iguales. O lo que es lo mismo, si aplicamos la condición necesaria de extremo relativo: $\exists\, c \in (a,b) / f'(c)=0$.

Problema 1 Sesión 42 (nivel inicial)

Utilizar el Teorema de Rolle para demostrar que la función $f(x)=\frac{\cos(x^3+2x^2+3x)}{\sqrt{x^2+x+2}}$ posee un valor real $\alpha \in (-2,1)$ que cumple $f'(\alpha)=0$.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 10 – Ejercicio 2)

Problema 2 Sesión 42 (nivel medio)

Sea la función $f(x)=x\,e^{-x^2}+a\,x$. ¿Cuánto debe valer a para poder aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo [0, 1]?

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 10 – Ejercicio 3)

SESIÓN 43. Unicidad de solución en una ecuación, usando Bolzano y Rolle

---

Podamos utilizar Bolzano y Rolle para demostrar que una ecuación tiene una y solo una solución posible. Razonamos así:

- Comprobamos que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.
- Comprobamos si $f(a)\cdot f(b)<0$.
- Aplicamos Bolzano, para garantizar la existencia de al menos una solución: $\exists\, c\in(a,b)/f(c)=0$.
- Hipótesis: suponemos que existen al menos dos soluciones $c_1,c_2\,\epsilon\,(a,b)\,/\,f(c_1)=f(c_2)=0$. La clave radica en que la hipótesis puede ser verdadera o falsa. Eso es lo que tenemos que demostrar.
- Comprobamos que $f(x)$ es derivable (suave) en el intervalo abierto (a,b).
- Si existieran dos soluciones, tendríamos dos valores donde las imágenes coincidirían: $f(c_1)=f(c_2)=0$.
- Podemos aplicar Rolle y afirmar que: $\exists\, d\in(c_1,c_2)/f'(d)=0$.
- Derivamos la función e igualamos a cero. Si al resolver $f'(x)=0$ llegamos a un absurdo matemático, significa que la hipótesis es falsa, porque el Teorema de Rolle no puede estar mal. ¿Qué absurdos pueden aparecer al resolver la ecuación $f'(x)=0$? Estos son algunos ejemplos:
  - La raíz cuadrada de un número negativo.
  - El logaritmo de cero o de un número negativo.
  - Un valor d tras aplicar Rolle que quede fuera del intervalo de partida $[a,b]$.

Problema 1 Sesión 43 (nivel medio)

¿Demuestra que la ecuación $e^x=2+x$ tiene solamente una única solución positiva.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 11 – Ejercicio 2)

Problema 2 Sesión 43 (nivel medio)

Utiliza el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $x^4-2x^3-1=0$ tiene una única solución negativa.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 11 – Ejercicio 4)

SESIÓN 44. Teorema de Lagrange y Teorema de Cauchy

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Gradient Match (nrich) https://nrich.maths.org/problems/gradient-match

---

El Teorema de Lagrange engloba al Teorema de Rolle.

- Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$.
- Si $f(x)$ es una función derivable (suave) en el intervalo (a,b) .
- Entonces se cumple que $\exists\, c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es decir, hay un punto donde la derivada coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
- Fíjate que si se cumpliera que $f(b) = f(a)$, el Teorema de Lagrange se reduce al Teorema de Rolle, porque llegaríamos a la conclusión ya conocida $f'(c) = 0$.

El Teorema de Cauchy engloba al Teorema de Lagrange.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$.
- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables (suaves) en el intervalo (a,b) .
- Si $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0$ para $\forall x \epsilon (a,b)$.
- Entonces se cumple que $\exists\, c \in (a,b) / \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
- Fíjate que si se cumpliera que $g(x) = x$, el Teorema de Cauchy se reduce al Teorema de Lagrange, porque llegaríamos a la conclusión ya conocida $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Problema 1 Sesión 44 (nivel medio)

Encontrar un punto de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2-x}$ cuya recta tangente sea paralela a la recta que une a los puntos de inicio y fin del intervalo [0, 1]. Relaciona el resultado con el Teorema de Lagrange

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 12 – Ejercicio 1)