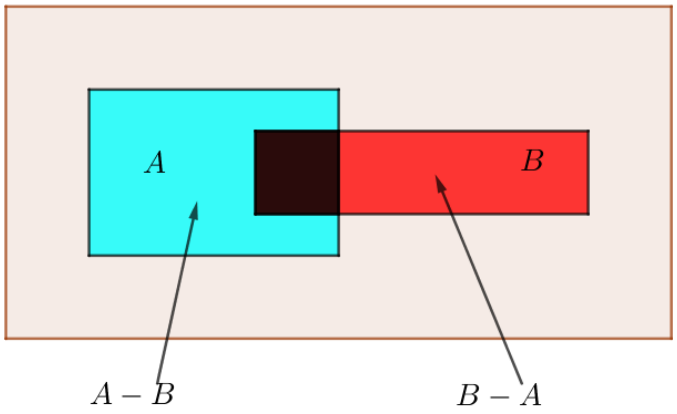
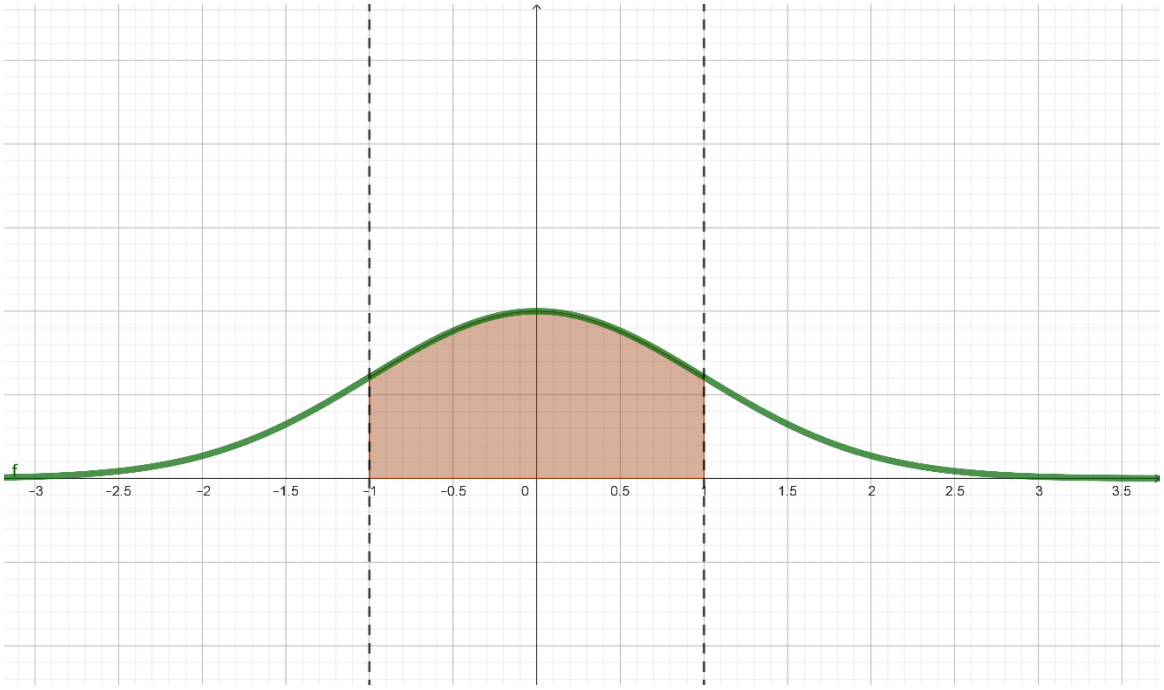
MATEMÁTICAS CCSS 1ºBACH

Índice, Resumen de Teoría y Ejercicios Esenciales





COLEGIO MARISTA "LA INMACULADA" (GRANADA)
Profesor: Daniel Partal García – www.danipartal.net

BREVE DESCRIPCIÓN

El presente documento muestra el índice de contenidos de la asignatura de Matemáticas CCSS de 1ºBachillerato, el resumen de teoría de cada uno de los seis temas en que se organiza la asignatura y un listado de ejercicios esenciales (con la referencia a su solución en la web de la asignatura).

El desarrollo completo de los materiales de la asignatura está disponible en la web:

www.danipartal.net

EVALUACIÓN	TEMA (EXAMEN ACUMULATIVO AL FINALIZAR CADA TEMA)
1ª Evaluación de septiembre a noviembre	Tema 1: Repaso 4ºESO
	Tema 2: Programación lineal
2ª Evaluación de diciembre a febrero	Tema 3: Probabilidad
	Tema 4: Estadística
3ª Evaluación de marzo a junio	Tema 5: Funciones y Límites
	Tema 6: Derivadas
Examen global final de junio	Examen de hora y media de duración con el que subir la nota obtenida al finalizar la tercera evaluación

Las **actividades de calificación trimestrales** son:

- **Dos pruebas escritas sin ayuda de apuntes personales**.
- La **media de las resoluciones y explicaciones de problemas en la pizarra, de manera individual,** que serán previamente preparadas por el alumno con ayuda de sus apuntes personales.
- La **media de las respuestas orales a las preguntas de clase, del trabajo diario observado por el profesor, de las tareas de grupo realizadas en clase y del trabajo con software matemático en el aula**.

Los **contenidos son acumulativos** conforme avanza el curso. Todas las actividades de calificación buscan evaluar el mayor número de criterios de evaluación posible, con actividades competenciales razonadas y argumentadas al estilo de las que el profesor resuelve en clase. Estas actividades dan una evaluación (de Insuficiente a Sobresaliente) de los 18 criterios de evaluación que la ley educativa marca para las asignaturas de Matemáticas CCSS en 1º y 2ºBachillerato.

La experiencia docente afirma que calcular la media de la asignatura como una media de esos 18 criterios de evaluación es una tarea compleja de comprender por el alumnado y sus familias. Por lo tanto, siendo prácticos en la vida y buscando la mejor preparación posible al examen de acceso a la Universidad, fijaremos el siguiente patrón: **90% de la calificación trimestral corresponde a la media de las pruebas escritas** y el **10% de la calificación corresponde a la media del resto de actividades**. Estos porcentajes son una aproximación al porcentaje de criterios evaluados en cada tipo de actividad.

La nota del tercer trimestre se corresponde con la nota final de la asignatura, ofreciéndose un examen escrito global final para subir la nota a finales de junio.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. **Tema 1. Repaso de 4ºESO**
   - 1.1. Típicos errores matemáticos: factorizar, simplificar, racionalizar, conjugado, binomio de Newton.
   - 1.2. Propiedades de los números reales. Intervalos: unión e intersección. Aproximación. Error. Notación científica.
   - 1.3. Teorema del resto en la división de polinomios. Ruffini.
   - 1.4. Puntos característicos de una parábola (representación gráfica de un polinomio de segundo grado).
   - 1.5. Resolver ecuaciones con raíces, bicuadráticas y con cociente de polinomios.
   - 1.6. Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3. Método de Gauss.
   - 1.7. Ecuaciones exponenciales e introducción al concepto de logaritmo.
   - 1.8. Problemas de enunciado para resolver mediante ecuaciones y sistemas.
2. **Tema 2. Programación lineal**
   - 2.1. Inecuaciones lineales de una incógnita.
   - 2.2. Sistemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas.
   - 2.3. Teorema fundamental de la programación lineal.
   - 2.4. Ejercicios tipo de Selectividad sobre programación lineal.
3. **Tema 3. Probabilidad**
   - 3.1. Experimento aleatorio. Espacio muestral y sucesos. Álgebra de Boole y diagramas de Venn.
   - 3.2. Regla de Laplace y axiomas de probabilidad de Kolgomorov.
   - 3.3. Técnicas de recuento. Diagramas de árbol.
   - 3.4. Sucesos dependientes e independientes. Probabilidad condicionada.
   - 3.5. Tabla de contingencia.
   - 3.6. Teorema de probabilidad total y Teorema de Bayes. Ejercicios tipo de Selectividad.
4. **Tema 4. Estadística**
   - 4.1. Repaso de conceptos de estadística unidimensional.
   - 4.2. Variable aleatoria discreta: distribución binominal o de Bernoulli.
   - 4.3. Variable aleatoria continua: distribución normal o gaussiana. Aproximación de la binomial a la normal.
   - 4.4. Concepto de muestreo aleatorio simple y estratificado.
5. **Tema 5. Funciones y Límites**
   - 5.1. Concepto de función: dominio e imagen en polinomios. Especial atención a la gráfica de rectas, parábolas y polinomios de grado tres. Dominio en operaciones elementales con funciones: suma, resta, producto y cociente de funciones.
   - 5.2. Concepto de continuidad. Interpretación gráfica de discontinuidades. Funciones a trozos. Concepto de límite de una función en un punto. Límites laterales.
   - 5.3. Propiedades de límites e indeterminaciones k/0, 0/0, infinito/infinito, infinito menos infinito en cociente de polinomios y raíces de polinomios.
   - 5.4. Definición de asíntotas de funciones. Asíntotas en cociente de polinomios.
   - 5.5. Estudio cualitativo de gráficas de funciones. Traslación vertical y horizontal.
6. **Tema 6. Derivadas**
   - 6.1. Velocidad media y tasa de variación media. Definición formal de derivada. Tabla de derivación de funciones elementales.
   - 6.2. Relación entre derivada y crecimiento de la función. Interpretación geométrica de la derivada. Pendiente de la recta tangente a la función.
   - 6.3. Punto crítico y condición necesaria de extremo relativo. Condiciones suficientes de extremo relativo.
   - 6.4. Condición necesaria de punto de inflexión. Condiciones suficientes de punto de inflexión.
   - 6.5. Diferencias entre extremos absolutos y relativos.
   - 6.6. Condiciones de contorno en la gráfica de funciones.
   - 6.7. Regla de L'Hôpital en la resolución de límites.
   - 6.8. Derivabilidad en funciones definidas a trozos.
   - 6.9. Introducción a los problemas de optimización. Estudio y representación de funciones.
   - 6.10. Introducción a las integrales inmediatas.

"Knowledge isn't free. You have to pay attention."

— Richard P. Feynman

RESUMEN TEORÍA TEMA 1: REPASO DE 4ºESO

Típicos errores matemáticos y lagunas matemáticas que debemos evitar:

- Ojo al despejar en ecuaciones de primer grado:
  - $3x = 0 \rightarrow x = 0 - 3 \rightarrow x = -3 \rightarrow$ NO
  - $3x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{3} \rightarrow x = 0 \rightarrow$ SÍ
- No olvidar las multiplicaciones al sustituir una variable por un valor concreto, dentro de una función:
  - $f(x) = 2x + 1 \rightarrow f(-1) = 2 - 1 + 1 \rightarrow f(-1) = 2 \rightarrow$ NO
  - $f(x) = 2x + 1 \rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 \rightarrow f(-1) = -1 \rightarrow$ SÍ
- El cuadrado afecta al signo de un número negativo. Es fundamental usar paréntesis:
  - $f(x) = x^2 + 4 \rightarrow f(-2) = -2^2 + 4 \rightarrow f(-2) = -4 + 4 \rightarrow f(-2) = 0 \rightarrow$ NO
  - $f(x) = x^2 + 4 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 4 \rightarrow f(-2) = 4 + 4 \rightarrow f(-2) = 8 \rightarrow$ SÍ
- En una inecuación con fracciones, la variable no puede pasar multiplicando o dividiendo al otro miembro, porque no sabemos si representa un valor positivo o negativo.
  - $\frac{x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x+5} \rightarrow \frac{x(x+5)}{(x-1)(2x+1)} \leq 1 \rightarrow$ NO
  - $\frac{x}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x+5} \rightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2x+1}{x+5} \leq 0 \rightarrow \frac{x(x+5)-(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+5)} \leq 0 \rightarrow$ SÍ
- **Al resolver ecuaciones con raíces cuadradas o con logaritmos**, hay que **comprobar si la solución final satisface la ecuación de partida**. Recuerda que no existe la raíz cuadrada de un número real negativo. Y no existe el logaritmo de cero ni el logaritmo de un número negativo.
  - $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x} = 0 \rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2x} \rightarrow elevamos\ al\ cuadrado \rightarrow x - 1 = 2x \rightarrow x = -1 \rightarrow$ NO es solución, porque el valor $x = -1$ provoca que uno de los discriminantes de partida sea negativo.
- Al aplicar raíz cuadrada para resolver una ecuación de segundo grado incompleta, no olvidar aplicar los dos signos $\pm$ a la solución final.
  - $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x = 2 \rightarrow$ NO
  - $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow$ SÍ
- Ojito al sacar factor común en una expresión polinómica:
  - $3x^3 + 2x^2 + x \rightarrow x\left(\frac{3x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x}\right) \rightarrow x(3x^2 + 2x + 1) \rightarrow$ SÍ
- En un cociente de polinomios, solo podemos simplificar si encontramos un factor que multiplique a todo el numerador y a todo el denominador:
  - $\frac{1+x^2+x^4}{x^3} \rightarrow \frac{1+x^2(1+x^2)}{x^2 \cdot x} \rightarrow \frac{1+x^2(1+x^2)}{x^2 \cdot x} \rightarrow \frac{1+(1+x^2)}{x} \rightarrow \frac{2+x^2}{x} \rightarrow$ NO
  - $\frac{4x^2+2x}{8x} \rightarrow \frac{2x(2x+1)}{2x(4)} \rightarrow \frac{2x+1}{4} \rightarrow$ SÍ
- La raíz de una suma (o de una resta) no se rompe en la suma (o en la resta) de dos raíces. Esto solo ocurre en la raíz de un producto y en la raíz de un cociente:
  - $\sqrt{x-3} \rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{3} \rightarrow$ NO
  - $\sqrt{x^2-36} \rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{36} \rightarrow x - 6 \rightarrow$ NO
  - $\sqrt{x^2+4} \rightarrow \sqrt{x^2+2^2} \rightarrow x + 2 \rightarrow$ NO
  - $\sqrt{x \cdot y} \rightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \rightarrow$ SÍ (siempre que x e y sean no negativos)
  - $\sqrt{\frac{x}{y}} \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \rightarrow$ SÍ (siempre que x e y sean no negativos)
- **En una ecuación con cociente de polinomios, no olvides comprobar que los valores candidatos a solución no anulen ninguno de los denominadores**:
  - $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot x - 1 \cdot x^2}{x^2 \cdot x} = 0 \rightarrow \frac{2x - x^2}{x^3} = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \cdot x^3 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0$

    Candidatos a solución: $x = 0, x = 2 \rightarrow$ Pero $x = 0$ NO es solución por anular los dos denominadores de la ecuación de partida.
- Al operar con fracciones es recomendable aplicar m.c.m. en los denominadores para obtener las expresiones más sencillas posible:
  - $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow$ m.c.m: $x^2 \rightarrow \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot x}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{2-x}{x^2} = 0 \rightarrow 2 - x = 0 \cdot x^2 \rightarrow 2 - x = 0 \rightarrow$ solución única: $x = 2$

- Ojo con las potencias de binomios y de trinomios:
  - $(x+y)^2 = x^2 + y^2 \rightarrow$ NO
  - $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \rightarrow$ SÍ (el cuadrado de la suma es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo)
  - $(x-y)^2 = x^2 - y^2 \rightarrow$ NO
  - $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \rightarrow$ SÍ (el cuadrado de la diferencia es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble producto del primero por el segundo)
  - $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \rightarrow$ SÍ (suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados)
  - $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow$ NO → ¿Cómo se hace? Operando $(a+b+c)(a+b+c)$. Es decir:
    - $(a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$

      Agrupando términos: $(a+b+c)(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- **Una igualdad no es lo mismo que una ecuación**. Por ejemplo:
  - $A = B$ es una igualdad donde nos dice que el valor A siempre es igual al valor B. En una igualdad nunca se resuelve, porque no hay ninguna incógnita.
  - $x^3 - 2x = x^2 + 4$ es una ecuación, donde la igualdad solo se cumple para determinados valores de la incógnita x. **Resolver una ecuación significa obtener el valor o los valores de x que satisfacen la igualdad de partida**. Puede ocurrir que una ecuación no tenga solución.

Los números naturales $\mathcal{N}$ están incluidos dentro de los números enteros $\mathcal{Z}$.

Los números enteros $\mathcal{Z}$ están incluidos dentro de los números fraccionarios $\mathcal{Q}$.

Los números irracionales $\mathcal{I}$ son aquellos que no pueden expresarse como una fracción de números enteros. Por lo tanto, los números fraccionarios y los números irracionales forman dos conjuntos sin elementos en común.

Agrupando tanto a los números fraccionarios como a los números irracionales tenemos el cuerpo de los números reales $\mathcal{R}$.

En la recta real podemos representar:

- $[a,b]$ intervalo cerrado
- (a,b) intervalo abierto
- $[a,b)$ intervalo semicerrado (o semiabierto)
- $(a,b]$ intervalo semicerrado (o semiabierto)
- Si el intervalo llega por uno de los extremos a infinito, ese lado siempre se representa abierto: $(-\infty, b]$.
- Un punto cerrado se representa por un círculo negro.
- Un punto abierto se representa por un círculo blanco.

La **unión** $\cup$ de dos conjuntos de números está formado por todos los elementos de ambos conjuntos. La unión es una operación conmutativa.

La **intersección** $\cap$ de dos conjuntos está formado solo por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez. La intersección también es una operación conmutativa.

Si no hay elementos en común entre dos conjuntos, la intersección forma el **conjunto vacío** $\emptyset$. No confundir el conjunto vacío con el número cero (son dos cosas totalmente distintas).

Al operar con potencias, recuerda las siguientes propiedades:

- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n \times b^m)^p = a^{n \times p} \times b^{m \times p}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exponentes fraccionarios se pueden expresar en forma de raíz. Por ejemplo:

- $a^{1/2} = \sqrt{a}$
- $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$

Cuando una raíz aparece en el denominador de un número fraccionario, siempre **racionalizaremos** (eliminar la raíz del denominador). Para ello, multiplicamos y dividimos por la raíz del denominador. Por ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{2 \times \sqrt{3}}{3}$$

Si en el denominador aparece un número más una raíz, deberemos aplicar conjugado al racionalizar. Por ejemplo:

$$\frac{3}{1+\sqrt{5}} \rightarrow \frac{3}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \rightarrow \frac{3-3\times\sqrt{5}}{1^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \rightarrow \frac{3-3\times\sqrt{5}}{1-5} \rightarrow \frac{3-3\times\sqrt{5}}{-4} \rightarrow \frac{-3+3\times\sqrt{5}}{4}$$

Cuando dividimos dos números reales, se cumple:

$$Dividendo = Divisor \times Cociente + Resto$$

Si aplicamos esta relación al caso particular de un polinomio $P(x)$ dividido entre un binomio $(x-a)$:

$$\frac{P(x)}{(x-a)} \rightarrow P(x) = (x-a) \times C(x) + Resto$$

En este caso particular, como el Divisor $(x-a)$ es un polinomio de primer grado, el Resto será un número real (es decir, el Resto es un polinomio de grado cero). Si evaluamos el Dividendo $P(x)$ en el valor $x = a$, tendremos:

$$P(a) = (a-a) \times C(a) + Resto \rightarrow P(a) = Resto$$

Teorema del Resto: El Resto de la división $\frac{P(x)}{(x-a)}$ coincide con el valor del polinomio $P(x)$ evaluado en $x = a$.

Por lo tanto, si encontramos un valor $x = a$ que haga que $P(a) = 0$, diremos que $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$. Y esta es la base teórica que justifica la **regla de Ruffini** para extraer (por ensayo y error) las raíces de un polinomio.

En Ruffini es recomendable probar con los siguientes valores:

- Los divisores del término independiente (con signo $\pm$).
- Si el coeficiente líder es distinto de uno, probar con el cociente de los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente líder (con signo $\pm$).

Por ejemplo: Si $P(x)$ es un polinomio de grado tres, con coeficiente líder k, y con tres raíces $x = a, x = b$ y $x = c$, el polinomio quedará factorizado como $P(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$. **No olvidar el coeficiente líder al factorizar el polinomio**.

Un polinomio de grado n, como máximo, puede tener n raíces.

La **función parábola** es la representación gráfica de un polinomio de grado dos:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

- En el eje horizontal (abscisas) representamos los valores de la variable x. En el eje vertical (ordenadas) representamos los valores de la imagen $f(x)$.
- La parábola siempre tiene un **vértice** (que puede ser máximo o mínimo absoluto de la imagen). La gráfica de la parábola siempre es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por el vértice.
- Si el coeficiente líder a es positivo, la parábola es convexa y el vértice es un mínimo absoluto. Si el coeficiente líder a es negativo, la parábola es cóncava y el vértice es un máximo absoluto.
- La coordenada horizontal del vértice se obtiene con la expresión $x_{vértice} = \frac{-b}{2\,a}$.
- Los posibles puntos de corte de la parábola con el eje horizontal se obtienen calculando los cortes entre la función parábola y la recta horizontal $y = 0$. Por lo tanto, deberemos resolver la ecuación de segundo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Una parábola puede cortar dos veces, una o ninguna al eje horizontal, según el número de soluciones de la ecuación de segundo grado anterior.
- El corte de la parábola con el eje vertical implica sustituir $x = 0$ en la función parábola. Por lo tanto, las coordenadas del corte con el eje vertical son $(0, c)$. Una parábola siempre corta al eje vertical.
- Si el término independiente de la parábola es $c = 0$, significa que la parábola pasará por el origen de coordenadas $(0,0)$.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, **obtener los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones implica resolver la ecuación formada por la igualdad $f(x) = g(x)$**. En los puntos de corte, la imagen de ambas funciones coincide.

Al igualar las fórmulas de dos funciones es bastante común que lleguemos a este tipo de ecuaciones:

- Ecuaciones de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$. Se resuelven con la conocida expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Consejo práctico: calculadoras como la Casio fx-570 (que muchos tenéis desde Secundaria) contiene sencillos comandos para obtener las soluciones de ecuaciones polinómicas. Es bueno saber utilizar de manera eficiente la calculadora.
- Ecuaciones bicuadráticas: $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Aplicamos el cambio $x^2 = t$ para llegar a una ecuación de segundo grado donde la incógnita sea t. No olvidar deshacer el cambio, para sacar las soluciones de x.
- Ecuaciones polinómicas de grado 3 o superior, donde aplicaremos Ruffini.
- Ecuaciones exponenciales, donde la incógnita es a^x. Con un cambio $a^x = t$ llegamos a una ecuación polinómica. No olvidar deshacer el cambio para obtener las soluciones de la incógnita x. Para ello, aplicaremos la siguiente propiedad: $a^x = t \rightarrow \log_a(a^x) = \log_a(t) \rightarrow x = \log_a(t)$. El valor de los logaritmos los obtenemos con la calculadora. Por norma general, trabajaremos con logaritmo de base 10 (decimal) o con logaritmo de base e (neperiano).

Los **sistemas de ecuaciones lineales** son un conjunto de ecuaciones donde las incógnitas aparecen multiplicadas por coeficientes reales y están elevadas a la primera potencia. Los sistemas se pueden resolver por **sustitución, igualación y reducción**. El **método de Gauss** no es más que aplicar el método de reducción varias veces seguidas.

En un sistema lineal 3x3 donde las incógnitas son (x, y, z), tras terminar el método de Gauss tendremos una tercera ecuación donde solo aparece la incógnita z. Una segunda ecuación donde aparecen las incógnitas y, z. Y una primera ecuación donde aparecen las incógnitas x, y, z. De la tercera ecuación podremos obtener el valor de z. Llevaremos ese valor a la segunda ecuación, para obtener el valor de y. Y finalmente iremos a la primera ecuación para sacar el valor de x. En el método de Gauss:

- Podemos intercambiar el orden de dos ecuaciones entre sí o el orden de dos incógnitas entre sí.
- Podemos multiplicar una ecuación por un número real.
- Podemos sumar o restar dos ecuaciones para generar una nueva ecuación que sustituya a una de las otras.
- Si hay dos ecuaciones iguales o proporcionales, podemos eliminar una de ellas.

Las soluciones de un sistema deben cumplir todas y cada una de las ecuaciones de partida. En sistemas de ecuaciones lineales, las incógnitas (x, y, z …) pueden tener una única solución (Sistema Compatible Determinado S.C.D.) o infinitas soluciones (Sistema Compatible Indeterminado S.C.I.). Si aparecen 2 o 3 soluciones distintas para una incógnita, o si llegamos a una incongruencia del tipo 0 igual a un número distinto de 0, significa que estamos frente a un absurdo matemático y el sistema será Sistema Incompatible (S.I.).

Los **sistemas homogéneos son aquellos donde todos los términos independientes son iguales a cero**. Los sistemas homogéneos siempre tienen solución, por lo que nunca pueden ser incompatibles. Si la solución es única, será la solución trivial $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (para un sistema 3x3 homogéneo).

El siguiente enlace a la web *Matrix Calculator* es muy práctico para comprobar nuestras operaciones con sistemas:

- https://matrixcalc.org/es

El **dominio de una función** $f(x)$ son los valores permitidos de la variable x que podemos sustituir dentro de la función. El dominio de una función polinómica es toda la recta real. El dominio de una función racional es toda la recta real menos los valores que anulan al denominador.

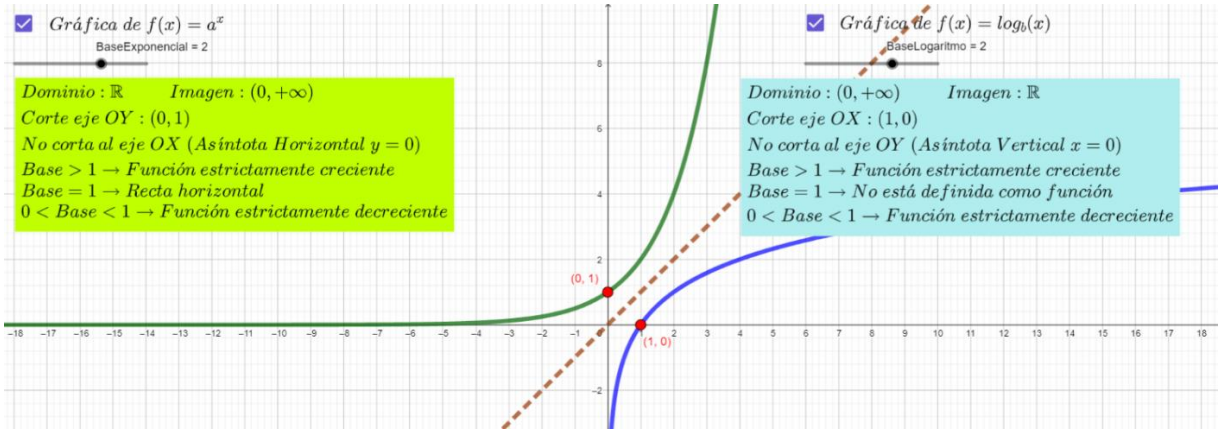
La **función exponencial de base** $a > 0$ hace corresponder, a cada número real x, el valor a^x:

- Si $a > 1 \rightarrow f(x) = a^x$ es una función estrictamente creciente.
- Si $a = 1 \rightarrow f(x) = 1^x$ es una recta horizontal $f(x) = 1$.
- Si $0 < a < 1 \rightarrow f(x) = a^x$ es una función estrictamente decreciente.
- El dominio de $f(x) = a^x$ es toda la recta real. La función pasa por el punto $(0,1)$.
- Al operar con ecuaciones exponenciales es bastante común aplicar las siguientes propiedades:
  - $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
  - $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

La **función logaritmo de base** $a > 0$ es la función inversa de la función exponencial. Es decir:

- $\log_a x = y \rightarrow$ aplicamos exponencial de base $a \rightarrow x = a^y$. ¿Cómo entender la función logaritmo $\log_a x = y$? Significa: "¿A qué valor debemos elevar a para obtener x?". La respuesta a esta pregunta sería: $a^y = x$.
- En $f(x) = \log_a x$ el término a es la base del logaritmo.
  - La base a no puede ser negativa, ya que tampoco existe la función exponencial de base negativa.
  - Si $a > 1 \rightarrow f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente creciente.
  - Si $a = 1 \rightarrow$ No es una función, ya que 1 elevado a cualquier número real siempre da 1.
  - Si $0 < a < 1 \rightarrow f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente decreciente.
  - El dominio de $f(x) = \log_a x$ es $(0, +\infty)$. La función pasa por el punto $(1,0)$.
  - Tres propiedades importantes al operar con ecuaciones logarítmicas:
    - $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$
    - $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
    - $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas entre sí respecto de la recta $y = x$. Esto se cumple con las gráficas de la exponencial y el logaritmo, cuando son de la misma base.



Si conocemos la gráfica de una función $f(x)$ es fácil **desplazar su gráfica vertical y horizontalmente**:

- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x) + k$ implica desplazar verticalmente, hacia arriba, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.
- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x) - k$ implica desplazar verticalmente, hacia abajo, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.
- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x + k)$ implica desplazar horizontalmente, hacia la izquierda, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.
- Si $k > 0$ la gráfica de $f(x - k)$ implica desplazar horizontalmente, hacia la derecha, la gráfica de $f(x)$ un número de k unidades.

RESUMEN TEORÍA TEMA 2: PROGRAMACIÓN LINEAL

Una inecuación es una desigualdad matemática con al menos una incógnita. Resolver la inecuación implica obtener los intervalos de la/las incógnitas que cumplen el sentido de la desigualdad.

La solución de una inecuación con una incógnita, por lo general, no será un valor concreto sino un intervalo (o un conjunto de intervalos).

Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número, el resultado es una inecuación equivalente (con la misma solución). Si se les multiplica o divide por un mismo número positivo, el resultado también es equivalente (con la misma solución). Pero si se multiplica o se divide por un mismo número negativo, deberemos cambiar el sentido de la desigualdad.

- $x^2 + 2x + 1 \geq 3x - 2 \rightarrow$ equivalente al restar 7 $\rightarrow x^2 + 2x + 1 - 7 \geq 3x - 2 - 7$
- $x^2 + 2x + 1 \geq 3x - 2 \rightarrow$ equivalente al dividir por 4 $\rightarrow \frac{x^2+2x+1}{4} \geq \frac{3x-2}{4}$
- $x^2 + 2x + 1 \geq 3x - 2 \rightarrow$ cambia de sentido la desigualdad al multiplicar por (-1) $\rightarrow -(x^2 + 2x + 1) \leq -(3x - 2)$

En inecuaciones lineales de una sola incógnita, la incógnita x aparece dentro de un polinomio de primer grado. Basta con llevar a un lado los términos con x y al otro lado los términos independientes, para obtener finalmente el intervalo solución.

En un **sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas**, **la solución se obtiene gráficamente como una parte del plano XY que cumple todas las desigualdades del sistema**. Con cada inecuación de dos incógnitas se razona así:

- Transformamos la inecuación del sistema en una igualdad, obteniendo así la ecuación de una recta.
  - Pintamos en el plano la recta, dando dos valores a la variable independiente y obteniendo los correspondientes valores de la variable dependiente.
  - La recta divide al plano en dos zonas. Tomamos un punto arbitrario en alguna de las dos zonas y evaluamos ese punto en la inecuación. Si se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto; si no, la solución será el otro semiplano.
  - Si la desigualdad incluye el signo igual, los puntos que pertenecen a la recta también serán solución.
- Repetir los pasos anteriores para cada una de las inecuaciones del sistema.
- La solución final del sistema será la intersección de las regiones solución de cada inecuación. Obtendremos una región del plano, que podrá ser acotada o no acotada. Los vértices que delimitan la región solución (**región factible**) se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones 2x2 de las rectas que se cortan formando cada vértice.

Un **sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas se resuelve gráficamente**, dibujando la solución (**región factible**) en un sistema de coordenadas de dos dimensiones. Los problemas de contexto real sobre inecuaciones lineales forman los ejercicios de **programación lineal**, donde debemos optimizar una **función objetivo** $f(x, y)$ en el interior de la región factible.

Optimizar significa obtener el máximo (maximizar) o el mínimo (minimizar) de los valores que devuelve la función objetivo $f(x, y)$.

El **Teorema Fundamental de la Programación Lineal** afirma que, si la región factible es acotada y convexa, la función objetivo se optimiza en al menos uno de sus vértices. Si dos vértices consecutivos optimizan la función objetivo, significa que todos los puntos del segmento que une ambos vértices forman parte de la solución.

Si la región factible es no acotada, no tenemos garantizado que el problema de optimización tenga solución; pero si la tiene, aparece en al menos uno de los vértices.

En los problemas de programación lineal es bastante común asumir las condiciones de no negatividad, por el contexto del enunciado:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$

Si las incógnitas x, y del problema de programación lineal representan valores naturales (número de camisetas, número de personas, etc.) los puntos que optimizan a la función objetivo deben estar formado por números naturales, para respetar el contexto del enunciado.

RESUMEN TEORÍA TEMA 3: PROBABILIDAD

Al realizar un experimento aleatorio existen varios resultados posibles (sucesos posibles). Y en cada experimento siempre se obtendrá uno de esos posibles resultados. Cada suceso posible se llama **suceso elemental**. Por ejemplo, al lanzar un dado de seis caras, los sucesos posibles son las puntuaciones de cada una de las caras del dado.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral (E)**. El conjunto de todos los sucesos elementales forma el espacio muestral.

Varios sucesos elementales unidos forman un subconjunto del espacio muestral, formando lo que se conoce un **suceso S**.

Un **suceso imposible** es el que nunca puede ocurrir en el experimento aleatorio. Se representa por el conjunto vacío: $\emptyset$. Por ejemplo, es imposible obtener una puntuación de 7 lanzando una vez un dado de seis caras.

El **suceso seguro** es aquel que coincide con el espacio muestral E, por lo que es seguro que siempre se cumple. Los subconjuntos $\emptyset$ y E se consideran subconjuntos impropios del espacio muestral. Po ejemplo, sacar una puntuación entre 1 y 6 en el lanzamiento de un dado de seis caras es un suceso seguro.

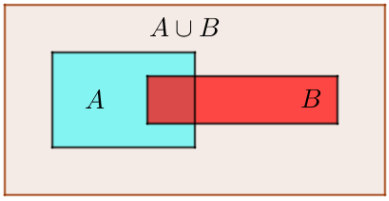
Dos **sucesos son iguales** si contienen los mismos sucesos elementales.

Un **suceso complementario o contrario** de A es el que se cumple cuando no se realiza A. Lo representamos por $\bar{A}$ o bien por A^c.

$E\ (espacio\ muestral)$

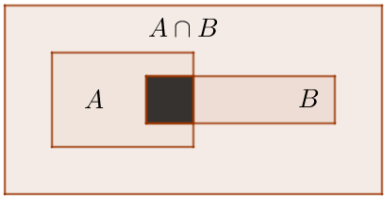
Unión de dos sucesos → $A \cup B$ → Se verifica si se cumple A o se cumple B (es válido si se cumpla al menos uno de los dos sucesos). La unión de un suceso A y de su complementario da lugar a todo el espacio muestral. Es decir: $A \cup \bar{A} = E$.

$E\ (espacio\ muestral)$



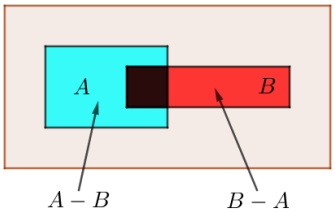
Intersección de dos sucesos → $A \cap B$ → Se verifica si se cumple A y si se cumple B (es válido si se cumplen los dos sucesos a la vez). Dos sucesos incompatibles son lo que no tienen sucesos elementales en común, es decir, los que la intersección da lugar al conjunto vacío → Si $A \cap B = \emptyset$ significa que A y B son incompatibles.

$E\ (espacio\ muestral)$



Diferencia de dos sucesos → $A - B$ → Se verifica si se cumple A y no se cumple B (es válido si se cumple A, pero no se cumple B). Una consecuencia de esta definición es: $\bar{A} = E - A$. El complementario contiene todos los elementos del espacio muestral salvo los elementos de A.

$E\ (espacio\ muestral)$



Leyes de Morgan:

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. El complementario de la unión es la intersección de complementarios.
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. El complementario de la intersección es la unión de complementarios.

Regla de Laplace:

Si poseemos un espacio muestral E con n-sucesos elementales equiprobables, la probabilidad a priori de que acontezca un suceso elemental es 1/n.

Generalización de la regla de Laplace:

- Sea E un espacio muestral de n-sucesos elementales.
- Sea A un suceso con m-sucesos elementales, siendo $m \leq n$.
- La probabilidad de A es igual al cociente entre el número de resultados favorables de A y el número de resultados posibles de E: $P(A) = \frac{nº\ casos\ favorables}{nº\ casos\ posibles} = \frac{m}{n}$

Ley de los grandes números:

La probabilidad a posteriori (frecuencia relativa de A) y la probabilidad a priori ($P(A)$) coinciden en el caso límite de que el número de repeticiones tiende a infinito.

Axiomas de Kolgomorov:

- La probabilidad total es 1 → P(E) = 1
- Cualquier suceso A cumple 0 ≤ P(A) ≤ 1
- La probabilidad del conjunto vacío (suceso imposible) es cero → $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Cuando dos sucesos pueden realizarse a la vez, se llaman **compatibles**. Si dos sucesos son **incompatibles** (no tienen sucesos elementales en común), la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades: si $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- La probabilidad de un suceso A y de su complementario cumplen la siguiente relación: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. O lo que es lo mismo: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
- Si A y B son dos sucesos, y A está incluido dentro de B, se cumple: $P(A) \leq P(B)$
- Dados dos sucesos cualesquiera A y B se cumple: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Dados un conjunto de sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ incompatibles dos a dos, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades. Es decir: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k)$

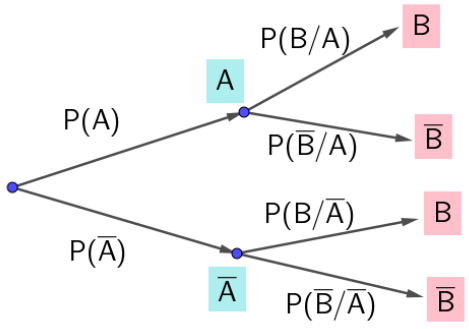
Cuando el número de elecciones en un experimento aleatorio es reducido también es recurrente el uso de un diagrama de árbol. Es un esquema en el que se indica el número y el nombre de las sucesivas elecciones, indicando la probabilidad de cada opción.

En un diagrama de árbol, se abren tantas ramas como resultados posibles tenga el experimento. En cada rama se indica la probabilidad del suceso correspondiente.

Una vez terminado el árbol, para calcular la probabilidad del suceso que representa una de las ramificaciones (camino), se multiplican las probabilidades que aparecen a lo largo de todas las ramas que forman dicha ramificación (camino).

Si un suceso B engloba varios caminos, la probabilidad total de que ocurra el suceso B se obtiene sumando las probabilidades de cada uno de esos caminos.

La suma de las probabilidades de todas las ramas que parten de un mismo punto es igual a 1.



P(B/A) → Se lee de la siguiente forma: **"Probabilidad de B condicionado a que ocurra A"**. Es decir, **probabilidad de que ocurra B si sabemos seguro que también ocurre A**.

- **En dos sucesos independientes**, **la probabilidad de la intersección es igual a la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo**. Cuando los resultados de dos sucesos no dependen entre sí, la probabilidad de la intersección de ambos sucesos se calcula simplemente multiplicando las probabilidades de casa suceso por separado.
  - **Si A y B son independientes** → $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$
- ¿Qué ocurre si A y B son dependientes? La probabilidad de la intersección dependerá de la probabilidad condicionada P(B/A).
  - **Si A y B son dependientes** → $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$

¡OJO! No confundir sucesos independientes con sucesos incompatibles:

- Los sucesos incompatibles son aquellos que no tienen elementos en común, por lo que la probabilidad de la intersección es igual a 0.
- Si la probabilidad de que ocurra el suceso B depende de si se cumple o no se cumple el suceso A, se dice que ambos sucesos son dependientes. En caso contrario, son independientes.
- En sucesos dependientes hay condicionamiento: $P(B/A) \neq P(B)$ y $P(A/B) \neq P(A)$
- En sucesos independientes no hay condicionamiento: $P(B/A) = P(B/\bar{A}) = P(B)$ y $P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A)$

¿Cómo obtener el valor de las probabilidades condicionadas?

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}\ \boldsymbol{, siempre\ que\ P(A) \neq 0}$$

$$\boldsymbol{P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) \rightarrow P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}}\ \boldsymbol{, siempre\ que\ P(B) \neq 0}$$

Por la ley de los grandes números, podemos considerar las **frecuencias relativas como probabilidades**. Y eso es precisamente una **tabla de contingencias: una tabla de frecuencias relativas que muestra, en sus celdas, las probabilidades de las intersecciones de dos sucesos**. Para dos sucesos A y B la tabla se representa:

	A	$\bar{A}$	Totales
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Totales	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

La suma de las dos primeras celdas de la columna A ofrece la probabilidad de A: $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$.

La suma de las dos primeras celdas de la columna $\bar{A}$ ofrece la probabilidad de $\bar{A}$: $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$.

La suma de las dos primeras celdas de la fila B ofrece la probabilidad de B: $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$.

La suma de las dos primeras celdas de la fila $\bar{B}$ ofrece la probabilidad de $\bar{B}$: $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$.

Como ya sabemos, la probabilidad de un suceso más la probabilidad de su complementario da 1. Y por eso se cumple en los bordes de la tabla:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\bar{B}) = 1$$

La tabla de contingencia ofrece directamente la probabilidad de las intersecciones de los sucesos.

- $P(A \cap B) \rightarrow$ ocurre A y B.
- $P(A \cap \overline{B}) \rightarrow$ ocurre A y no ocurre B.
- $P(\overline{A} \cap B) \rightarrow$ no ocurre A y sí ocurre B.
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \rightarrow$ no ocurre A y no ocurre B.

El diagrama de árbol, en sus segundas ramificaciones, ofrece las probabilidades condicionadas:

- $P(B/A) \rightarrow$ ocurre B condicionado a que antes haya ocurrido A.
- $P(B/\overline{A}) \rightarrow$ ocurre B condicionado a que antes no haya ocurrido A.
- $P(\overline{B}/A) \rightarrow$ no ocurre B condicionado a que antes haya ocurrido A.
- $P(\overline{B}/\overline{A}) \rightarrow$ no ocurre B condicionado a que antes no haya ocurrido A.

Cualquier ejercicio se puede resolver mediante tabla de contingencia o mediante diagrama de árbol.

Si los sucesos son dependientes, siempre podemos pasar de una representación a otra mediante la ecuación ya conocida de:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\ , siempre\ que\ P(A) \neq 0$$

Si los sucesos son independientes las ecuaciones son más sencillas, ya que se cumple:

$$P(B/A) = P(B/\bar{A}) = P(B) \text{ y } P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Teorema de la Probabilidad Total:

Siempre que tengamos sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ incompatibles entre sí dos a dos, todos ellos con probabilidad no nula, y además la unión de todos los sucesos de lugar a todo el espacio muestral:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$$

Podemos calcular la probabilidad de que ocurra un suceso B a partir de las probabilidades condicionadas:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

El resultado $P(B)$ que ofrece el Teorema de Probabilidad Total es idéntico al que se obtiene al sumar las probabilidades de todos los caminos del diagrama de árbol que terminan en el suceso B.

Teorema de Bayes:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas $P(B/A_1), P(B/A_2), \ldots, P(B/A_n)$. Se cumple:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Donde en el denominador P(B) hemos aplicado el Teorema de Probabilidad Total.

Todos **los ejercicios que se resuelven con el Teorema de Bayes se pueden seguir resolviendo con un diagrama de árbol y con el concepto de probabilidad condicionada**. El cociente que aparece en la fórmula del Teorema de Bayes es una aplicación de la regla de Laplace: en el numerador aparecen los casos favorables (el camino del diagrama de árbol que pasa por el suceso A_i y por el suceso B) y en el denominador aparecen todos los casos totales (todos los caminos del diagrama de árbol que terminan en el suceso B).

RESUMEN TEORÍA TEMA 4: ESTADÍSTICA

En una **variable estadística X de una población de tamaño N**, obtendremos el **valor medio** de la variable con:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i}{N}$$

Siendo x_i los valores concretos que toma la variable estadística X, y siendo n_i las frecuencias absolutas (repeticiones) de cada uno de los valores concretos x_i. La media es un "representante" del conjunto de valores x_i . Pero no significa que la media sea el valor más probable de encontrar dentro de la muestra.

Para determinar lo bien o mal que funciona la media como representante de los valores x_i , debemos estudiar parámetros de dispersión. Por ejemplo, la **varianza**:

$$\sigma^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

Donde el factor $f_i = \frac{n_i}{N}$ se conoce como frecuencia relativa.

La raíz cuadrada de la varianza es la **desviación típica**:

$$\sigma = s = \sqrt{s^2}$$

Cuanto menor sea la desviación típica mejor funcionará la media como representante de los valores x_i . Una desviación típica igual a 0 significa que todos los valores x_i coinciden con el valor medio $\bar{x}$. Y cuanto más grande sea la desviación típica, más alejados están los valores x_i de la media $\bar{x}$.

El coeficiente de variación CV es la división entre la desviación típica y la media, en tanto por ciento.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Al comparar dos poblaciones con medias distintas y desviaciones distintas, diremos que la población que tenga un CV más pequeño tendrá sus valores más próximos a su media que la otra población.

Supongamos un experimento donde se realizan n ensayos idénticos. Cada ensayo es independiente de los demás.

Cada ensayo tiene solo dos resultados posibles: éxito o fracaso. La probabilidad de éxito se denomina p y es constante durante todo el experimento. Por lo tanto, la probabilidad de fracaso será $1-p$ (aquí la probabilidad viene expresada en tanto por uno). A este tipo de experimentos se les denomina experimento binomial.

Si X es una variable aleatoria discreta que indica el número de éxitos obtenidos en un experimento binomial, diremos que **X es una variable aleatoria binomial** $B(n,p)$.

El valor n **indica el número de ensayos realizados**.

El valor p **indica la probabilidad de éxito en cada ensayo**.

La probabilidad de que en n ensayos encontremos k éxitos de la variable discreta binomial X se conoce como **función de probabilidad binomial o función de probabilidad de la distribución binomial**:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$donde \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

La función de distribución binomial (la palabra "probabilidad no aparece") acumula la probabilidad para valores iguales o inferiores a k éxitos:

$$F(k) = P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k)$$

Media o esperanza matemática para la Binomial $B(n,p)$**:**

$$\mu = n \cdot p$$

Varianza en la Binomial:

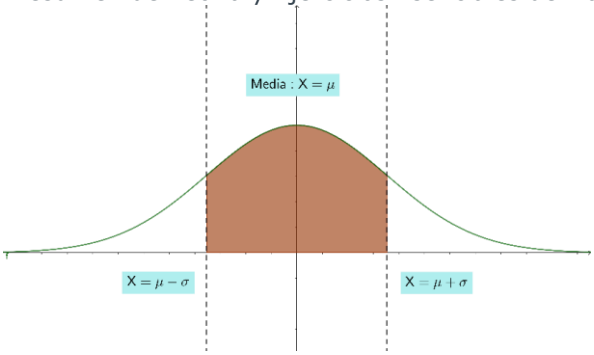
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$$

Desviación típica en la Binomial:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$$

Una variable aleatoria continua X se dice que sigue una **distribución normal** $N(\mu,\sigma)$ **de media** μ **y desviación típica** σ si los valores posibles de la variable ocupan toda la recta real (desde $-\infty$ hasta $+\infty$) y la gráfica de la distribución normal toma la forma de la conocida campana de Gauss.

Esta gráfica es simétrica respecto al valor medio μ (la media coincide con la mediana) y muchas variables aleatorias se pueden aproximar a esta forma (peso de una población de una determinada edad, altura de las personas de un curso, etc.).



Esta distribución normal ha sido tan estudiada a lo largo de los años que **existen tablas con los valores acumulados** para diferentes intervalos. Para usar estas tablas necesitamos convertir la distribución $N(\mu,\sigma)$ en una distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $N(0,1)$.

Este proceso se conoce como **tipificar la variable**. ¿Cómo pasar de N(μ, σ) a N(0,1)?

Definiendo una nueva variable aleatoria:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}\ .$$

En variable continua la probabilidad de que Z tome un valor concreto k es prácticamente 0, debido al gran número de valores posibles para Z (podemos ver la variable continua Z como una variable real que puede tomar infinitos valores decimales). Por eso, en variable continua, la tabla tipificada no da el valor $P(Z=k)$ sino que da el valor acumulado $P(Z \leq k)$ a la izquierda de Z=k.

La distribución binomial (variable discreta), **bajo determinadas condiciones, puede aproximarse a la normal** (variable continua). Esto es una consecuencia del **Teorema central del límite**, que dice así:

Si el tamaño de la población n es muy grande (superior a 30) y la probabilidad p no se acerca ni a 0 ni a 1, podemos aproximar la variable aleatoria X que sigue una distribución normal B(n,p) a una variable continua X que sigue una distribución normal $N(n\cdot p,\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)})$.

Esta aproximación es válida si:

$$n\cdot p \geq 5$$

$$n\cdot(1-p) \geq 5$$

Un **muestreo aleatorio simple** significa que los n individuos de la muestra se eligen al azar, con reemplazamiento. De esta forma, todos los individuos tienen la misma probabilidad de ser elegidos, independientemente de qué individuo se elija el primero o el último.

Un **muestreo estratificado** ocurre cuando los N individuos de la población se organizan en diversos grupos (o estratos) A_1, A_2, A_3, … , A_k. En cada estrato contamos con N_1, N_2, N_3, … , N_k individuos. De tal forma que se cumple:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_k$$

Si elegimos de la población de tamaño N una muestra de tamaño n, el número de individuos n_1, n_2, n_3, … , n_k de cada estrato dentro de la muestra se deben elegir de manera proporcional. Es decir:

$$\frac{N}{n} = \frac{N_1}{n_1} = \frac{N_2}{n_2} = \frac{N_3}{n_3} = \ldots = \frac{N_k}{n_k}$$

Sea una población de la que sabemos que un estadístico tiene una media μ y una desviación típica σ. Por ejemplo: la altura de todos los españoles. Elijamos muestras de tamaño n (por ejemplo, muestras de 2.000 españoles sobre los que estudiar su altura). Cada muestra tendrá su correspondiente media y su correspondiente desviación. La media de las medias de todas las muestras se llama media muestral $\mu_{\bar{X}}$. Y la desviación del conjunto de datos formado por las medias de todas las muestras llama desviación muestral $\sigma_{\bar{X}}$. El próximo curso, en 2ºBach CCSS, profundizaremos en estos dos conceptos.

RESUMEN TEORÍA TEMA 5: FUNCIONES Y LÍMITE

Una **función de variable real $f(x)$ necesita de un dominio de definición**, que son los valores de la variable real x que pueden ser sustituidos en la ecuación de la función.

- El dominio de un polinomio es toda la recta real.
- El dominio de un cociente de polinomios es toda la recta real menos los valores que anulan al denominador.
- El dominio de un producto de funciones $f(x)\cdot g(x)$ es la intersección de los dominios de cada función: $Dom(f)\cap Dom(g)$.
- El dominio de un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la intersección de los dominios de cada función menos los valores que anulan al denominador: $Dom(f)\cap Dom(g)-\{x\in\mathcal{R}\ /\ g(x)=0\}$

Una función es continua en su dominio si podemos dibujar la gráfica de la función sin levantar la mano del papel.

El límite de la función $f(x)$ cuando el valor de x se acerca a x_0 significa conocer el valor de la imagen de la función al que tendemos conforme nos acercamos más y más (sin llegar a alcanzar) al valor x_0.

$$L=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Este acercamiento puede ser por la derecha (límite lateral derecho) o por la izquierda (límite lateral izquierdo) de x_0.

$$L^+=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\ ,\ L^-=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

¿Cómo calcular un límite?

Lo más práctico es **evaluar $x=x_0$** en la ecuación de la función. Si el resultado es un número real, hemos terminado y ese número real es el valor del límite.

Pero si obtenemos una **indeterminación**, deberemos aplicar las técnicas de resolución de límites.

En **límites sobre cociente de polinomios, o con raíces cuadradas de polinomios**, encontraremos los siguientes **tipos de indeterminaciones**:

- **Indeterminación $\frac{k}{0}$** siendo k un valor real no nulo: No estamos dividiendo por 0, sino que el denominador "se acerca" a 0 tanto como queramos (sin llegar a ser nunca 0). En este caso, tendremos que calcular los límites laterales, que se dispararán a más o a menos infinito.
- **Indeterminación $\frac{0}{0}$** : En cociente de polinomios, factorizamos, simplificamos y evaluamos para resolver la indeterminación. Si aparecen raíces de polinomios, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la parte de la fracción que contiene a la raíz. Y tras aplicar el conjugado, tendremos que simplificar y evaluar.
- **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$** : En cociente de polinomios, dividiremos por la máxima potencia de la variable. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces de polinomios, debemos tener en cuenta que, por ejemplo, la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2, en el infinito, se comporta como un polinomio de grado 1. Ya que, en el infinito, el comportamiento de un polinomio lo marca el término con el mayor grado (y la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2 se aproxima a un polinomio de grado 1 cuando x tiende a infinito).
- **Indeterminación $\infty-\infty$** : En fracciones de polinomios, aplicamos m.c.m. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces cuadradas, podemos multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión que contiene a la raíz. Para después, simplificar y volver a evaluar.

Para conocer la **continuidad de una función en un punto concreto x_0 del dominio**, como puede ser el punto frontera en una función definida a trozos, aplicamos las tres condiciones de continuidad en un punto:

- $\exists f(x_0)$
- $L^+=L^-=L\epsilon\mathcal{R}$
- $f(x_0)=L$

Tipos de discontinuidad:

- Si $L^+=L^-=L\epsilon\mathcal{R}$, pero NO se cumple $f(x_0)=L$, tendremos una **discontinuidad evitable**. En este caso puede ocurrir que no esté definido el valor $f(x_0)$.
- Si los límites laterales existen, son finitos, pero NO se cumple $L^+=L^-$, tendremos una **discontinuidad no evitable de salto finito**.
- Si los límites laterales existen, y al menos uno de los dos se dispara a infinito (da igual si es $+\infty$ o $-\infty$), tendremos una **discontinuidad no evitable de salto infinito**.

Los candidatos a A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio, o los puntos frontera de los intervalos que definen al dominio. Deberemos estudiar los límites laterales y comprobar si al menos uno de ellos se dispara a más o a menos infinito. La A.V. es una recta vertical $x=x_0$ que no es atravesada por la función.

La **A.H.** estudia el comportamiento de la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.H. en $x\to+\infty$, coincidirá con la A.H. en $x\to-\infty$. La A.H. es una recta horizontal $y=k$ que cumple $\lim_{x\to\infty} f(x)=k\in\mathcal{R}$.

La **A.O.** es una recta con pendiente no nula a la que tiende la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.O. en $x\to+\infty$, coincidirá con la A.O. en $x\to-\infty$. La A.O. es una recta $y=m\,x+n$ donde:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ ,\ n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-m\,x]$$

En cociente de polinomios, si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, tendremos A.H.

En cociente de polinomios, si el grado del numerador supera en 1 unidad al grado del denominador, tendremos A.O.

Si existe A.H. en $x \to +\infty$, seguro que no habrá A.O. en $x \to +\infty$. Y viceversa.

Si existe A.H. en $x \to -\infty$, seguro que no habrá A.O. en $x \to -\infty$. Y viceversa.

Repasamos también las propiedades principales de las rectas, que son funciones polinómicas de primer grado:

- Dada una recta, la mejor forma de dibujar su gráfica es obtener dos puntos, representarlos en un sistema de coordenadas y unirlos por una línea recta.
- Ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$.
- Ecuación punto pendiente de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto (x_0, y_0) : $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$
- Una función del tipo $f(x) = k \epsilon \mathcal{R}$ es una recta horizontal. Ojo, una recta vertical $x = k \epsilon \mathcal{R}$ no es una función porque para un valor de la variable independiente hay infinitos valores posibles de la variable dependiente.

RESUMEN TEORÍA TEMA 6: DERIVADAS

La **Tasa de Variación Media (TVM) en un intervalo** $[a,b]$ se define para una función $f(x)$ continua en ese intervalo:

$$TVM = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La TVM relaciona el incremento de la imagen de una función (numerador $f(b)-f(a)$) con el incremento de la variable independiente (denominador $b-a$).

El concepto de derivada se define a partir del concepto de TVM, cuando la anchura del intervalo $[a,b]$ tiende a 0.

La **derivada es una medida del crecimiento de una función**. Derivada positiva en un punto, implica que la función es estrictamente creciente en ese punto. Derivada negativa en un punto, significa que la función es estrictamente decreciente en ese punto:

- $f'(x_0)>0 \rightarrow$ función estrictamente creciente en x_0
- $f'(x_0)<0 \rightarrow$ función estrictamente decreciente en x_0
- $f'(x_0)=0 \rightarrow$ **punto crítico** en x_0 (puede ser máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión)

La **definición formal de derivada mediante límite** es:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}[f(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

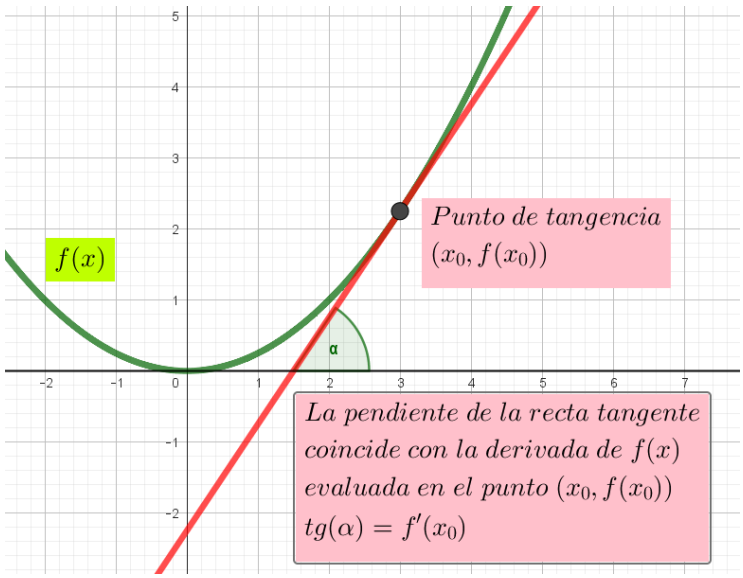
En un resumen como este, por cuestiones de espacio, no vamos a escribir la tabla completa de derivadas elementales. Pero sí dejo indicado el enlace para descargarla en formato PDF:

https://www.geogebra.org/m/zvm9squv

Aprender a derivar sin error es de vital importancia. Por lo que recomiendo vivamente imprimir esta tabla de derivadas, estudiarla y tenerla a mano en clase para consultarla cada vez que tengamos que derivar. Con el tiempo y la práctica, terminaremos aprendiéndola.

El valor de la derivada evaluada en un punto x_0 coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x_0 . Es decir:

$$m_{tangente} = f'(x_0)$$



Los puntos críticos son los puntos que anulan la primera derivada. Esta condición también se conoce como **condición necesaria de extremo relativo**:

$$x_0 \text{ es un punto crítico si } f'(x_0)=0 \text{ (condición necesaria de extremo relativo)}$$

Los puntos críticos pueden ser:

- Máximos relativos (suaves)
- Mínimos relativos (suaves)
- Puntos de inflexión

Para discriminar si un punto crítico es un extremo relativo, aplicamos la condición suficiente de extremo relativo.

Hay dos formas de aplicar a un punto crítico la condición suficiente de extremo relativo:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos críticos. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la primera derivada. Si hay cambio de signo en la derivada a la izquierda y a la derecha de un punto crítico, tendremos un extremo relativo.
    - Cambio de derivada positiva a derivada negativa, indica un máximo relativo (paso de creciente a decreciente).

- Cambio de derivada negativa a derivada positiva, indica un mínimo relativo (paso de decreciente a creciente).
- Si no hay cambio de signo en la derivada, es un punto de inflexión.

- Segunda forma: Calcular la segunda derivada y evaluarla en el punto crítico (forma recomendada para polinomios, porque son muy fáciles de derivar).
  - Segunda derivada negativa en el punto crítico, indica un máximo relativo.
  - Segunda derivada positiva en el punto crítico, indica un mínimo relativo.
  - Segunda derivada nula en el punto crítico, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

La **segunda derivada es una medida de la curvatura** (**concavidad o convexidad**) de una función:

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ función convexa ∪ en x_0
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ función cóncava ∩ en x_0
- $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ **candidato a punto de inflexión** en x_0 (no todos los puntos de inflexión son puntos críticos)

La condición necesaria de punto de inflexión es anular la segunda derivada:

$$x_0 \text{ es un candidato a punto de inflexión si } f''(x_0) = 0 \ (\text{condición necesaria de punto de inflexión})$$

También **existen dos formas de aplicar a un candidato a punto de inflexión la condición suficiente de punto de inflexión**:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos candidatos a puntos de inflexión. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la segunda derivada. Si hay cambio de signo en la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de un punto candidato, tendremos un punto de inflexión.
  - Cambio de segunda derivada positiva a segunda derivada negativa, indica un punto de inflexión (paso de convexa a cóncava).
  - Cambio de segunda derivada negativa a segunda derivada positiva, indica un punto de inflexión (paso de cóncava a convexa).
  - Si no hay cambio de signo en la segunda derivada, no hay punto de inflexión.
- Segunda forma: Calcular la tercera derivada y evaluarla en el candidato a punto de inflexión (forma recomendada para polinomios, por ser fáciles de derivar).
  - Tercera derivada negativa en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de convexa a cóncava.
  - Tercera derivada positiva en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de cóncava a convexa.
  - Tercera derivada nula en el candidato, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

Un máximo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más grande de todas.

Un mínimo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más pequeña de todas.

Para obtener los extremos absolutos de una función en toda la recta real o en un dominio formado por un intervalo abierto, tendremos que hacer un boceto de la gráfica en el dominio que nos han dado. Pero si nos piden **estudiar los extremos absolutos en un intervalo cerrado** $[a, b]$, podemos razonar así:

- Calcular los extremos relativos (condición necesaria y condición suficiente).
- Obtener la imagen de los extremos relativos, la imagen de $x = a$ y la imagen de $x = b$.
- Decidir los extremos absolutos comparando el valor de estas imágenes calculadas.

Regla de L'Hôpital: en límites $L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con indeterminación $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, si existe el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ coincide con el límite de partida L.

- Si tras aplicar L'Hôpital dos veces de forma consecutiva, volvemos al límite de partida, significa que nuestro límite no puede ser resuelto con esta regla. Por ejemplo: $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Una **función es derivable en un punto x_0 del dominio si la función es continua y suave en ese punto**. Las tres condiciones de continuidad en un punto ya las hemos repasado. **La condición de suavidad en un punto** (por ejemplo, en el punto frontera de una función a trozos) **es que las derivadas laterales sean iguales**:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Si al calcular una derivada lateral obtenemos una indeterminación, no olvidemos que estamos ante un límite sobre la función derivada. Por lo que podemos aplicar las técnicas de resolución de límites.

En los **problemas de optimización** encontramos un enunciado del cual debemos obtener información para conseguir una función suave de una sola variable, que tendemos que optimizar (**encontrar el valor del dominio**

que genera la imagen más grande o la imagen más pequeña). Debemos estudiar el dominio y buscar los extremos relativos de esa función.

Con frecuencia, en estos problemas de optimización aparece un único extremo relativo, por lo que es fácil razonar así: si solo aparece un extremo relativo en el dominio, ese extremo también será absoluto.

Sea una función $f(x)$. A toda función $F(x)$ cuya derivada coincida con $f(x)$ se le denomina primitiva de $f(x)$. Es decir:

$$F'(x) = \frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

Como la derivada de una constante real vale 0, tendremos **infinitas primitivas** que cumplen que su derivada coincida con la función $f(x)$.

$$\frac{d[F(x)+C]}{dx} = f(x)$$
$$Siendo\ C \epsilon \mathcal{R}$$

Definimos un proceso inverso al de la derivada, que llamaremos integral indefinida (también se le conoce como "antiderivada"). Y razonamos así: **si la derivada de $F(x)$ coincide con $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ coincide con $F(x)$.**

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Hablamos de integral "indefinida" por la **constante C** que antes hemos mencionado: **hay infinitas funciones resultantes de una integral indefinida porque la derivada de una constante vale 0**.

Las integrales más sencillas son las integrales inmediatas. Se resuelven leyendo la tabla de derivadas de derecha a izquierda. Por ejemplo:

$$Si\ la\ derivada\ de\ f(x) = x^2\ es\ f'(x) = 2x$$
$$La\ integral\ de\ 2x\ es \int 2x\,dx = x^2 + C$$

Las integrales cumplen las condiciones de linealidad:

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \rightarrow la\ integral\ de\ la\ suma\ es\ la\ suma\ de\ las\ integrales$
- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \rightarrow la\ integral\ de\ un\ número\ por\ una\ función\ es\ el\ número\ por\ la\ integral\ de\ la\ función$

Con una condición de contorno podemos determinar, de manera única, el valor de la constante de integración. Por ejemplo:

$$Obtener\ la\ primitiva\ de\ 2x\ que\ pase\ por\ el\ punto\ (1{,}0)$$
$$F(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$$
$$Si\ (1{,}0)\ pertenece\ a\ la\ gráfica\ de\ F(x) \rightarrow F(1) = 0 \rightarrow 1^2 + C = 0 \rightarrow C = -1$$
$$Solución\ que\ cumple\ la\ condición\ de\ contorno: F(x) = x^2 - 1$$

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 1: REPASO DE 4ºESO

1.1. Simplifica $\frac{x^4-y^4}{3x^3y-3xy^3}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 1)

1.2. Simplifica $(a+b)(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

1.3. Simplifica $\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{1}{x+2}-\frac{6x+4}{x^3-4x}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

1.4. Simplifica $\frac{3+a}{a+1}-\frac{1+a}{a-1}+\frac{2+a+a^2}{a^2-1}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 4)

1.5. Simplifica $\frac{100\cdot 2^{-4}\cdot 5^{-4}\cdot 3^{-2}}{(-1)^3\cdot 15^{-1}\cdot 6^{-2}}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 5)

1.6. Racionaliza:

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 6)

1.7. Simplifica $\frac{(2^3a^5)(16a^{-3}):(2^4a^4)}{(4a^3)^3}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 7)

1.8. Sea el número decimal 1.3456.

a) Aproxima por defecto con dos cifras decimales.

b) Aproxima por exceso con dos cifras decimales.

c) Calcula el error absoluto de ambas aproximaciones.

d) Calcula el error relativo de ambas aproximaciones.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

1.9. Hemos aproximado la fracción 11/15 al número decimal 0.73. ¿Qué error absoluto y relativo cometemos con esta aproximación?

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 2 – Ejercicio 2)

1.10. Responde de manera razonada:

a) El conjunto A está formado por todos los números naturales pares del 1 al 10. El conjunto B está formado por todos los números naturales múltiplos de 3 del 1 al 10. ¿Quiénes forman la unión del conjunto A y el conjunto B? ¿Y la intersección?

b) El conjunto A está formado por todos los números reales del 1 al 10. El conjunto B está formado por todos los números reales del 2 al 5, sin incluir al 5. ¿Quiénes forman la unión del conjunto A y el conjunto B? ¿Y la intersección?

c) Sean los conjuntos de números reales $A=[2,5]$, $B=[2,5]-\{3\}$, $C=(2,5)$ y $D=[2,3)\cup(3,5)$. Haz la unión y la intersección de todas las parejas de conjuntos. Ayuda: la unión y la intersección son conmutativas, por lo tanto si haces $A\cap B$ el resultado es idéntico a $B\cap A$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

1.11. Factoriza los polinomios:

a) $P(x) = 6x^4 - x^3 - 22x^2 + 11x + 6$

b) $P(x) = 12x^4 - 5x^3 - \frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3}$

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

1.12. Calcula el m.c.m y el M.C.D. de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$

$Q(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 13x + 10$

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

1.13. Opera y simplifica $\left(\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^2-1} : \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\right)\frac{1}{x^2-9}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

1.14. Opera y simplifica $\frac{(2x^2+x-1)(x-5)+13x+1}{2x^3-3x^2-8x-3}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 4)

1.15. Dada la función $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ calcula los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas. Ayuda: El eje horizontal (abscisas) viene representado por la recta horizontal $y = 0$. Mientras que el eje vertical (ordenadas) viene representado por la recta vertical $x = 0$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 5)

1.16. Halla el valor de k para que al dividir el polinomio $P(x) = x^4 - 2kx^2 + x - 1$ entre $(x - 2)$ el resto sea 1.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 6)

1.17. Halla el valor de a y b de forma que el polinomio $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$ tenga resto 9 al dividir entre $(x - 2)$ y sea divisible por $(x - 5)$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 3 – Ejercicio 7)

1.18. Obtener las soluciones de $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

1.19. Obtener los puntos de corte entre las parábolas $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 + 8$. Ayuda: Recuerda que los puntos de corte de la gráfica de dos funciones tienen una coordenada horizontal y una coordenada vertical (x, y).

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

1.20. Escribe la ecuación de una parábola sabiendo que pasa por los puntos $(0,4)$, $(3,-2)$ y $(5,4)$. Representarla.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

1.21. Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1} - \frac{2x-1}{1+x} = 3$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

1.22. Resuelve la ecuación $\frac{3x-3}{x-1} + \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{7x+1}{x^2-1}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

1.23. Resuelve $\frac{2x}{x-3}-\frac{x+5}{x+3}+\frac{2x-7}{x^2-9}=0$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 3)

1.24. Resuelve $34-x^2=\frac{225}{x^2}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 4)

1.25. Resuelve $\frac{1}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{2}=\frac{17}{6}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 5)

1.26. Resuelve $\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+7}=-1$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 6)

1.27. Resuelve $\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-1}-1$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 5 – Ejercicio 7)

1.28. Resuelve el sistema aplicando sustitución, igualación y reducción: $\begin{cases}2x-y=4\\3x+5y=0\end{cases}$

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

1.29. Resuelve aplicando el método de Gauss: $\begin{cases}x-3y+2z=1\\3x+2y+z=-1\\-3x+y-z=4\end{cases}$

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 6 – Ejercicio 2)

1.30. Resuelve aplicando el método de Gauss: $\begin{cases}x+y-2z=9\\2x-y+6z=-1\\2x-y+4z=4\end{cases}$

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 6 – Ejercicio 3)

1.31. Resuelve $5^x+5^{x+3}=\frac{126}{5}$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

1.32. Resuelve $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 2)

1.33. Resuelve $4^{x^2-6x}=16384$.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 3)

1.34. Calcula las medidas de un rectángulo cuya superficie es de 240 metros cuadrados, sabiendo que el largo es 6 metros mayor que el triple del ancho.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 1)

1.35. Calcula las dimensiones de un solar rectangular de superficie 1.200 m^2 y de diagonal 50 m.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 2)

1.36. En una división el dividendo es 1275; el cociente y el resto son iguales, y el divisor es el doble del cociente. ¿Cuál es el divisor?

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 3)

1.37. El número 365 es el número de días que tiene un año y es un número curioso: es suma de los cuadrados de 3 números naturales consecutivos. Calcúlalos.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 4)

1.38. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 2 cm más que el otro y 2 cm menos que la hipotenusa. Calcula las longitudes de los lados.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 5)

1.39. Encontrar un número que sumado con el doble de su raíz cuadrada dé 24.

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 6)

1.40. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51.5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 7)

1.41. En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

(solución: 1ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 8 – Ejercicio 8)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 2: PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\begin{cases} 5x + y \geq 5 \\ 3x - 2y \leq 4 \\ \frac{x}{2} - y > 0 \end{cases}$$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

2.2. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 1 \geq 0 \\ x - 3y - 6 > 0 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

2.3. Las restricciones de pesca de un país obligan a una empresa a pescar como máximo 2 toneladas de merluza y 2 toneladas de rape. Además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3 toneladas.

Si el precio de la merluza es de 6€/kg y el precio del rape es de 9€/kg, ¿qué cantidades debe pescar la empresa para obtener el máximo beneficio?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

2.4. Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 24 de vitamina C cada día. Existen en el mercado dos productos P1 y P2, que en cada comprimido contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

- Un comprimido de P1 contiene 3 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B y 4 unidades de vitamina C.
- Un comprimido de P2 contiene 4 unidades de vitamina A, 1 unidad de vitamina B y 3 unidades de vitamina C.

Cada comprimido P1 cuesta 10 céntimos y cada comprimido P2 cuesta 5 céntimos.

¿Cuántos comprimidos de cada tipo debe tomar al día para obtener el nivel de vitaminas indicado al menor coste económico?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 4)

2.5. Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70g de algodón y 20g de poliéster. Y para cada camisa estampada necesita 60g de algodón y 10 g de poliéster.

La empresa dispone para ello de 4200g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y, además, el número de estampadas debe ser al menos igual al doble del número de lisas.

Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

2.6. Sea la región del plano limitada por las inecuaciones:

$3x + y \geq 7$

$3x - 2y \leq 4$

Sea la función objetivo:

$f(x, y) = 3x + y$

Obtener su máximo y su mínimo en la región factible.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 6)

2.7. Indica la posición de los puntos $P(1,2)$ y $Q(5,1)$ en relación con la región solución que satisface el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y \le 12 \\ 2x+y \ge 4 \\ x-2y \le 6 \\ x-y \ge 0 \\ x \le 8 \end{cases}$$

Si el punto es exterior, indica qué desigualdades cumple.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 8)

2.8. Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kg de pintura mate necesita 0,4kg de producto A y 0,6kg de producto B. Cada kg de pintura brillante necesita 0,2kg de producto A y 0,8kg de producto B.

La empresa posee un máximo de 200kg de producto A y un máximo de 500kg de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200kg de pintura mate y al menos 300kg de pintura brillante.

El beneficio por kg de pintura mate es de 4€ y el beneficio por kg de pintura brillante es de 5€. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá? ¿Con la solución óptima, sobra alguna cantidad de los productos A y B?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 9)

2.9. Con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto van a poner a la venta dos tipos de bolsas de merienda. El primer tipo contendrá dos bocadillos, un refresco y una pieza de fruta y el segundo tipo tendrá un bocadillo, un refresco y dos piezas de fruta. Por cada bolsa del primer tipo cobrarán 6 euros y por las del segundo tipo 5 euros. Sabiendo que disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta y que se tiene garantizada la venta de todas las bolsas, ¿cuántas convendría preparar de cada tipo para que la cantidad de dinero obtenida por su venta sea máxima y a cuánto asciende la misma? ¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo? ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 11)

2.10. Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente.

La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, calcule las horas de funcionamiento de las cadenas A y B que minimizan el coste de producción de esos electrodomésticos.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 12)

2.11. Un cocinero tiene que hacer el postre para una cena y le han encargado dos de sus mejores creaciones: Delicia Roja y Delicia Negra.

Para elaborar 1 kg de Delicia Roja son necesarias 3 tarrinas de fresas y 1 tableta de chocolate y para elaborar 1 kg de Delicia Negra se necesita 1 tarrina de fresas y 2 tabletas de chocolate. Dispone de 15 tarrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate.

Además, la cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1'5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja. Si cada kilogramo de Delicia Roja le reporta un beneficio de 3 euros y el de Delicia Negra 5 euros, averigüe qué cantidad de cada postre debe elaborar para conseguir un beneficio máximo y a cuánto asciende ese beneficio.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 14)

2.12. Una confitería elabora dos tipos de tartas, unas de chocolate y otras de merengue y chocolate. Para ello dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue. Para elaborar una tarta de chocolate, se requieren 1 kg de bizcocho y 2 kg de crema de chocolate y para la tarta de chocolate y merengue se requieren 2 kg de bizcocho, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de merengue.

Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros y de 12 euros por cada una de merengue y chocolate. Suponiendo que se vende todo lo que se elabora, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 15)

2.13. Se considera el recinto cuadrado de vértices (1, 0), (0, 1), (-1, 0) y (0, -1).

Indique en qué puntos del recinto se alcanzan el valor máximo de la función:

F(x, y) = 3x +2y +7

y el valor mínimo de la función:

$G(x, y) = x + y + 6$

calculando dichos valores.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 18)

2.14. Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7'5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B.

Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67'5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 19)

2.15. Una librería necesita al menos 14 cajas de rotuladores, 8 cajas de folios y 18 cajas de bolígrafos. Dos distribuidores pueden proporcionarle los materiales, pero solamente los venden en lotes completos. El distribuidor A envía en cada lote 2 cajas de rotuladores, 4 de folios y 1 de bolígrafos. El distribuidor B envía en cada lote 3 cajas de rotuladores, 1 de folios y 7 de bolígrafos. Los costes por lote que se compre a cada distribuidor son de 60 euros y 65 euros respectivamente. ¿Cuántos lotes habrá que comprar a cada distribuidor para que los costes sean mínimos? ¿Cuáles serían esos costes?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 20)

2.16. Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Exprese la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represente gráficamente el recinto definido.

c) Obtenga el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 21)

2.17. Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las de tipo A y, como mínimo, 6.000 euros en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 22)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 3: PROBABILIDAD

3.1. Sea una bolsa de 4 bolas rojas (R), 2 blancas (B) y 3 verdes (V).

¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar una bola roja? ¿Y una bola blanca? ¿Y una verde?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

3.2. En una baraja española hay 40 cartas distribuidas en 4 palos: oros, copas, espadas y bastos. En cada palo hay 10 cartas (del 1 al 7, más sota, caballo y rey).

¿Cuál es la probabilidad de sacar un rey (R)? ¿Y de sacar una copa (C)? ¿Y de sacar un oro (O) o una copa (C)?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 2)

3.3. En una clase hay 15 chicos y 14 chicas. Se eligen dos alumnos al azar.

¿Qué probabilidad hay de que los dos alumnos elegidos sean chicas?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

3.4. Se sabe que las probabilidades de dos sucesos A y B son P(A)=0,5 y P(B)=0,7. También se sabe que la probabilidad de su intersección es 0,3.

¿Cuánto vale la probabilidad de la unión?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 4)

3.5. En una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una carta de bastos o que sea una figura?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 5)

3.6. Sean dos sucesos A y B. Expresar, usando operaciones de sucesos, los siguientes casos:

a) Que no ocurra ninguno de los dos.

b) Que ocurra al menos uno de los dos.

c) Que ocurra B pero no ocurra A.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 7)

3.7. Lanzamos un dado de seis caras. El suceso A es "obtener un número mayor que 4" y el suceso B es "obtener un número par". Escribe:

a) Elementos de A

b) Elementos de B

c) Elementos de $A^c \cup B$

d) Elementos de $(A \cap B)^c$

e) Probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

f) Probabilidad $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 8)

3.8. En un centro escolar el 80% de los alumnos practica algún deporte. El 25% toca un instrumento musical. El 15% realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar no realice ninguna de las actividades.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 9)

3.9. Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral. Sabemos que p(A)=0.5, p(B)=0.4 y que la probabilidad de unión de ambos sucesos es 0.8. Determinar p(A/B).

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 10)

3.10. Sean C y D dos sucesos del mismo espacio muestral. Sabemos que p(C)=0.3, p(D)=0.8 y que C y D son independientes. Determinar la probabilidad de la unión.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 2 – Ejercicio 11)

3.11. El 65% de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75% de los turistas que se hospedan en la capital y el 15% de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en la provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) Si se sabe que el turista se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

3.12. Una cooperativa envasa zumos de naranja, zumos de piñas y zumos de melocotón en botellas de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de las botellas son de zumo de naranja y el 30% de piña. Además, el 80% de las botellas de zumo de naranja y el 70% de los zumos de piña son de 2 litros, mientras que el 60% de las botellas de melocotón son botellas de 1 litro.

Se elige al azar una botella envasada por la cooperativa.

a) Calcula la probabilidad de que la botella sea de 2 litros.

b) Calcula la probabilidad de que el zumo sea de naranja, sabiendo que la botella es de 2 litros.

c) Calcula la probabilidad de que el zumo sea de melocotón, sabiendo que la botella es de 1 litro.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

3.13. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación, se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo extraído sea de fresa.

b) El segundo caramelo extraído sea del mismo sabor que el primero.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

3.14. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B, ni el 10% de los atendidos por el sastre C. El 55% de los arreglos se encargan al sastre A, el 30% al B y el 15% restante al C. Calcular la probabilidad de que un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 4)

3.15. Sea el experimento aleatorio consistente en lazar tres dados, cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral? ¿Y si lanzamos n-dados?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 6)

3.16. En un experimento aleatorio el espacio muestral es E={1,2,3,4,5,6}. Se consideran los sucesos: A={2,5,6}, B={1,3,4,5}, C={4,5,6}. Calcular las siguientes operaciones entre sucesos:

a) $A \cup (B \cap C)$ b) $\overline{A \cup B}$ c) $\overline{A \cap B}$ d) $A \cap (B \cup \overline{C})$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 8)

3.17. Un jugador de casino decide jugar a la ruleta cinco veces a lo sumo. Cada apuesta es de 10€. Es decir, puede ganar 10€ o puede perder los 10€ apostados.

Tiene en el bolsillo 10€ y deja de jugar cuando pierda esos 10€ iniciales o cuando haya ganado 30€.

Obtener el espacio muestral. ¿Con estas condiciones de juego, puede terminar ganando 20€?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 10)

3.18. Sea el espacio muestral del sexo (mujer o varón) de los hijos de las familias con tres hijos.

Sea el suceso A: "El hijo mayor es mujer".

Sea el suceso B: "Los dos hijos pequeños son mujeres".

a) ¿Qué elementos del espacio muestral aparecen en A?

b) ¿Qué elementos del espacio muestral aparecen en B?

c) ¿Qué elementos del espacio muestral aparecen en la intersección de A con B?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 11)

3.19. Lanzamos dos dados de seis caras y sumamos sus puntuaciones.

Hallar la probabilidad de que la suma sea igual a 11 y de que la suma sea menor o igual que 4.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 12)

3.20. Se ha trucado un dado de tal modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es directamente proporcional a los números de éstas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada una de las caras? ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 14)

3.21. En una ciudad surge un brote de dos enfermedades A y B. El 20% de los niños padecen la enfermedad A. El 15% de los niños padecen la enfermedad B. Y el 7% de los niños padecen ambas enfermedades a la vez.

¿Cuál es la probabilidad de que un niño esté enfermo de A o B?

En un colegio de 400 niños, ¿cuántos cabe esperar que padezcan ambas enfermedades?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 15)

3.22. En una bolsa se introducen 4 bolas rojas (R), 3 bolas blancas (B) y 1 bola negra (N).

Se realiza el siguiente juego:

- Se extraen dos bolas consecutivas, sin reposición.

- Si la primera bola es roja se suman 10 puntos, si la primera bola es blanca se suman 15 puntos y si la primera bola es negra se suman 20 puntos.

- Si la segunda bola es roja se suman 20 puntos, si la segunda bola es blanca se suman 30 puntos y si la segunda bola es negra se suman 40 puntos.

- Además, si la segunda bola es del mismo color que la primera, se añaden 5 puntos extras.

Dibujar el diagrama de árbol con todas las combinaciones posibles.

¿Cuál es la probabilidad de obtener 50 puntos en el juego?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 16)

3.23. Un dado con las caras numeradas del 1 al 6 está trucado de modo que la probabilidad de obtener un número es directamente proporcional a dicho número. Tiramos el dado una vez.

a) Halla la probabilidad de que salga 3 si se sabe que salió un número impar.

b) Calcula la probabilidad de que salga un número par si se sabe que salió un número mayor que 3.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 3 – Ejercicio 18)

3.24. El 40% de los incendios forestales en un país se deben a negligencias. Tomando este dato como probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que, al considerar dos incendios, al menos uno se deba a negligencias?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

3.25. En una moneda trucada la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz, sin importar el orden.

c) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

3.26. Dada la tabla de contingencia siguiente, determina si los sucesos son dependientes o independientes. Dibuja el diagrama de árbol asociado, considerando A como primer suceso temporal y B como segundo suceso temporal.

	A	$\bar{A}$	Totales
B	2/9	5/9	7/9
$\bar{B}$	1/9	1/9	2/9
Totales	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

3.27. Dada la siguiente tabla de contingencia, calcular:

a) La probabilidad de que acontezca A y B.

b) La probabilidad de que ocurra A y el opuesto de B.

c) La probabilidad de que ocurra el opuesto de A y B.

d) La probabilidad de que ocurra el opuesto de A y el opuesto de B.

e) La probabilidad de A condicionada a que haya ocurrido B.

f) La probabilidad de A condicionada a que no haya ocurrido B.

g) La probabilidad de B condicionada a que haya ocurrido A.

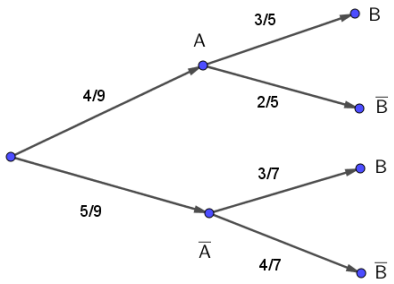
h) La probabilidad de B condicionada a que no haya ocurrido A.

i) El diagrama de árbol que comienza con la bifurcación de A y de su opuesto.

	A	$\bar{A}$	Totales
B	0,4	0,3	0,7
$\bar{B}$	0,2	0,1	0,3
Totales	0,6	0,4	1

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

3.28. Pasar del siguiente diagrama de árbol a su correspondiente tabla de contingencia.



(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 3)

3.29. En un club deportivo, el 55% de los socios practica natación, el 65% practica tenis y el 10% no practica ni natación ni tenis.

a) Si el club tiene 1200 socios, ¿cuántos practicarían ambos deportes?

b) Tomando al azar una persona de este club que practique natación, calcula la probabilidad de que no juegue al tenis.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 4)

3.30. En el enfermero de la doctora Martínez no se puede confiar, pues durante la ausencia del médico la probabilidad de que no le inyecte un suero a un enfermo es de 0,6. Se sabe que si a un enfermo grave se le inyecta el suero tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta entonces la probabilidad de que mejore es de 0,25. A su regreso, la Dra. Martínez se encuentra con que un enfermo ha empeorado. Calcula la probabilidad de que el enfermero olvidara inyectar el suero a este paciente.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 5)

3.31. En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) Juegue con videojuegos o lea libros.

b) Juegue con videojuegos y no lea libros.

c) Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 7)

3.32. En una población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es 1/12. Mientras que la probabilidad de ser mujer y daltónico es 1/25. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige al azar una persona.

a) Si la persona elegida es un hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

b) Si la persona elegida es una mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida al azar sea daltónica?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

3.33. El 69% de los habitantes de una ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) Calcula la probabilidad de que vea series o películas.

b) Sabiendo que ve series, calcula la probabilidad de que vea películas.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 4)

3.34. Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de ellos es 1/6. Calcula P(A) y P(B).

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 5)

3.35. Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que P(A)=1/9, P(B)=1/2 y $P(A \cap B) = 3/18$, se pide:

a) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcular $P(\bar{A}/B)$, donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de A.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 6)

3.36. Se tienen dos urnas A y B con bolas de colores con la siguiente composición: la urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas; mientras que la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado con 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que ha indicado el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea verde?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

c) Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que ésta proceda de la urna B?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 7)

3.37. Se estima que solo un 20% de los que compran acciones en bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos, el 80% obtiene beneficios. De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles, solo un 10% obtiene beneficios.

a) Calcula el porcentaje de los que obtienen beneficios comprando acciones en bolsa.

b) Eligiendo una persona al azar, calcula la probabilidad de que no tenga conocimientos bursátiles y que no tenga beneficios al invertir en bolsa.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 8)

3.38. De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea azul?

c) Si la segunda bola es azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea roja?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 11)

3.39. Python y JavaScript se encuentran entre los lenguajes de programación más estudiados por los programadores, con un 20% y un 18% de desarrolladores que se especializan únicamente en cada uno de ellos. El resto de desarrolladores se especializan entre una decena de lenguajes (HTML-CSS, Java, C,...). La probabilidad de que un desarrollador que se ha especializado en Python obtenga empleo es 0,85, mientras que la de que lo obtenga uno que se ha especializado en JavaScript es 0,9. También se sabe que la probabilidad de que un desarrollador esté desempleado es del 0,15.

a) Calcula la probabilidad de que un desarrollador esté empleado si no ha estudiado Python ni JavaScript.

b) Calcula la probabilidad de que un desarrollador que está desempleado se haya especializado en Python o JavaScript.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 12)

3.40. Una enfermedad puede estar producida por tres virus A, B y C. En el laboratorio hay tres tubos de ensayo con el virus A, 2 tubos de ensayo con el virus B y 5 tubos de ensayo con el virus C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad en un animal es de 1/3, que la produzca el virus B es de 2/3, y que la produzca el virus C es de 1/7.

a) Si elegimos al azar un tubo de ensayo e inoculamos el virus a un animal, calcula la probabilidad de que contraiga la enfermedad.

b) Si se inocula el virus a un animal y contrae la enfermedad, calcula la probabilidad de que el virus que se ha inoculado sea del tipo C.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 13)

3.41. Se tiene una prueba diagnóstica para una enfermedad con las siguientes propiedades:

- La probabilidad de que el test dé positivo teniendo la enfermedad es 0,95.
- La probabilidad de que el test dé negativo no teniendo la enfermedad es 0,95.
- La probabilidad de que una persona tenga la enfermedad es 0,05.

a) Realizada la prueba a una persona al azar, calcular la probabilidad de que el test dé positivo.

b) ¿Y la probabilidad de tener la enfermedad cuando el test ha dado positivo?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 15)

3.42. Se estudia una prueba diagnóstica para detectar una enfermedad en un grupo de 200.000 personas a las que se ha sometido a dicha prueba y de los que el 5% están enfermos.

Se ha observado que de los enfermos ha dado negativo a 50 personas y, de las sanas, le ha dado positivo a 19.900. Si se escoge al azar una de estas personas sometidas a la prueba diagnóstica:

a) Calcula la probabilidad de que la prueba dé resultado positivo

b) ¿Cuál sería la probabilidad de que el resultado de la prueba sea erróneo?

c) Calcula la probabilidad de que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 17)

3.43. Una empresa automovilística fabrica sus coches en cuatro factorías: F1, F2, F3 y F4. El porcentaje de producción total de coches que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10% respectivamente. Además, el porcentaje de pintado defectuoso en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4% respectivamente. Tomamos un coche al azar. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el coche haya sido fabricado en la factoría F1 y esté perfecto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la pintura del coche presente algún desperfecto?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 18)

3.44. Una determinada ciudad tiene en la plantilla del ayuntamiento 1.000 agentes de la policía local, 600 bomberos y 400 funcionarios de protección civil. En esta plantilla, el 42% de policías, el 20% de bomberos y el 50% de funcionarios de protección civil son mujeres. Se elige una persona al azar de la plantilla.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) Si la persona elegida es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea bombero?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 21)

3.45. Una librería tiene tres estanterías: superior, central e inferior.

En la estantería superior hay 3 novelas y 7 cuentos.

En la estantería central hay 8 novelas y 6 cuentos.

En la estantería inferior hay 5 novelas y 9 cuentos.

Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si resulta que es una novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 3 – Apartado 6 – Ejercicio 22)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 4: ESTADÍSTICA

4.1. En una clase de 30 alumnos, 2 alumnos han sacado una calificación de 2 en un examen. 4 alumnos un 3. 6 alumnos un 4. 4 alumnos un 5. 5 alumnos un 6. 3 alumnos un 7. 3 alumnos un 8. 2 alumnos un 9. Y un solo alumno un 10.

Obtener la media de la nota de la clase y su desviación típica (con dos cifras decimales redondeadas).

Si comparamos esta aula con otra clase donde el coeficiente de variación ha resultado del 30%, ¿cuál de las dos clases presentan menor dispersión de los valores respecto de su media?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 1 – Ejercicio 1)

4.2. Sea una población formada por los elementos 3, 4, 5 y 8. Se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2 con reemplazamiento.

a) Calcule todas las muestras posibles.

b) Calcule la media y la varianza de la población.

c) Calcule la media y la varianza de las medias muestrales. Ayuda: la media de las medias muestrales se llama media muestral. La varianza de las medias muestrales se llama varianza muestral.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

4.3. Sea una población formada por los elementos 1, 2 y 3. Mediante muestreo aleatorio simple se selecciona una muestra de tamaño 2 con reemplazamiento.

a) Escribe todas las muestras posibles dentro de la población.

b) Calcula la varianza de las medias de todas las muestras posibles de tamaño 2 (varianza muestral).

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

4.4. Tiramos cinco veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 caras y 3 cruces?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

4.5. Una oficina consta de 10 teléfonos. La probabilidad de que a cierta hora del día un teléfono esté comunicando es del 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que a esa hora se marquen los 10 teléfonos y no se encuentren más de dos comunicando?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 2)

4.6. Una fábrica de bolígrafos establece en un 5% el porcentaje de bolígrafos con punta defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja de 8 bolígrafos haya más de 7 defectuosos? ¿Cuál es la media de bolígrafos defectuosos en una caja escogida al azar?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

4.7. Si la probabilidad de que una persona use gafas es del 10%, hallar la media de la distribución de personas que usen gafas al elegir 20 personas al azar y la desviación típica de la distribución.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 4)

4.8. Un modelo de avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea a la que pertenece ha decidido vender más billetes que asientos hay en el avión. La probabilidad de que un pasajero se presente en el aeropuerto el día del vuelo es del 95 %. Si ese día la compañía ha vendido 280 billetes, ¿cuál es la probabilidad de que ese día se presenten 270 pasajeros?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 5)

4.9. Se sabe que la probabilidad de que un dardo impacte en una diana es 0,4. Si se lanzan 9 dardos, determina:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de dardos que dan en la diana.

b) La media y la desviación típica de esta distribución.

c) La probabilidad de que al menos 5 dardos impacten en la diana.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 6)

4.10. En un centro de fertilidad, cada intento de inseminación in vitro para cualquier pareja tiene un porcentaje de éxito del 30 %. Esta semana han acudido 10 parejas para realizar el tratamiento. Nos preguntamos por el número de ellas que consiguen tener hijos.

a) ¿De qué tipo de distribución se trata? Calcular su media y su desviación.

b) ¿Qué probabilidad hay de que ninguna pareja conciba? ¿y de que alguna conciba?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 7)

4.11. En un laboratorio de análisis clínicos, el 5% de las muestras que llegan no cumplen las condiciones requeridas para obtener resultados concluyentes en el análisis. Si se eligen 5 muestras, calcula:

a) La probabilidad de que de todas las muestras se puedan obtener resultados concluyentes.

b) La probabilidad de que de al menos dos no se obtengan resultados concluyentes.

c) La media y la desviación típica de la distribución.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 8)

4.12. Una fábrica de baterías para móviles ha detectado que una de sus máquinas produce un 10% de baterías defectuosas. Si se han seleccionado al azar y de forma independiente 6 baterías:

a) Calcula la probabilidad de que exactamente cuatro baterías sean defectuosas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo la mitad sean defectuosas?

c) ¿Qué es más probable que ninguna sea defectuosa o que lo sean las seis?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 2 – Ejercicio 9)

4.13. Las calificaciones finales de un colegio (de 0 a 10) siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 1,6. ¿Qué calificación acumula el 45% del alumnado?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

4.14. En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono fijo en casa. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya más de 30 con teléfono fijo.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

4.15. La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga problemas dermatológicos es de 0,15. Dada una muestra de 50 personas,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna tenga problemas dermatológicos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro tengan problemas dermatológicos?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

4.16. La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 6 meses es del 20 %. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 15 peces de esta especie nacidos este mes, halla la probabilidad de que al menos 2 de ellos sigan vivos dentro de 6 meses.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 300 peces de esta especie nacidos este mismo mes, halla la probabilidad de que al cabo de 6 meses hayan sobrevivido al menos 50 de ellos.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 4)

4.17. Sea una distribución normal tipificada. Calcula:

a) Calcula el valor de k que cumple $P(Z \leq k) = 0{,}8485$.

b) Calcula el valor de k que cumple $P(Z \geq k) = 0{,}9972$.

c) Calcula el valor de k que cumple $P(1 \leq Z \leq k) = 0{,}15$.

d) Calcula el valor de k que cumple $P(Z \leq 2 + k) = 0{,}9896$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 5)

4.18. En una distribución normal tipificada, ¿qué intervalo simétrico [-k, k] alrededor de la media acumula el 68,26% de las observaciones?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 7)

4.19. Sea una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Calcula: $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 8)

4.20. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una opción correcta y una opción incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 preguntas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 9)

4.21. En un barrio el 60% de los hogares tiene al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan al menos dos televisores?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 10)

4.22. Los resultados de un examen tienen una media de 78 y desviación típica 36. Se supone distribución normal.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se presente al examen y obtenga al menos una puntuación igual a 72?

b) Se declaran como "No Aptos" el 25% de los alumnos con las notas más bajas. ¿Qué proporción de estudiantes obtiene en su examen una nota que supera en al menos 5 puntos a la nota que marca la frontera entre "No Apto" y "Apto"?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 11)

4.23. Los resultados de un test de inteligencia siguen una distribución normal N(100,15).

a) Determinar el porcentaje de la población que obtendrá un coeficiente entre 95 y 110.

b) ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?

c) En una población de 2500 individuos, ¿cuántos individuos se esperan que obtengan un coeficiente superior a 125?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 12)

4.24. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23º y desviación típica 5º. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21º y 27º.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 13)

4.25. La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es de 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponemos que los pesos se distribuyen normalmente. Hallar cuántos estudiantes pesan:

a) Entre 60 kg y 70 kg.

b) Más de 90 kg.

c) Menos de 64 kg.

d) Exactamente 64 kg.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 14)

4.26. Las notas de un examen siguen una distribución normal N(65,18). Se desea clasificar a los alumnos en tres grupos: nivel bajo, nivel medio, nivel alto. Se desea que en el nivel bajo haya un 20% de los alumnos, un 65% en el nivel medio y un 15% en el nivel alto. ¿Qué puntuaciones marcan el paso de un nivel a otro?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 15)

4.27. La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) Calcula qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) Calcula la altura máxima que es superada por el 33% de la población.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 17)

4.28. El peso de los estudiantes de determinada localidad sigue una distribución normal de media 75 kg y varianza 36 kg^2.

a) Calcula el porcentaje de alumnado cuyo peso está comprendido entre 68 y 80 kg.

b) Si se sabe que uno de los estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 80 kg?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 19)

4.29. El peso de las lubinas vendidas en una cadena de hipermercados sigue una distribución normal de media 6.706 gramos. Sabiendo que el 20% de las lubinas pesan más de 7.386 gramos, calcula el porcentaje de lubinas que pesan entre 6 y 8 kg.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 20)

4.30. El peso de una población de elefantes africanos macho sigue una distribución normal de media 6 toneladas y desviación típica 1500 kg.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar pese exactamente 6 toneladas.

b) Calcule qué porcentaje de la población pesa entre 5 y 8 toneladas.

c) Calcule qué peso es superado por el 33% de la población.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 3 – Ejercicio 21)

4.31. En un pueblo habitan 700 hombres adultos, 800 mujeres adultas y 500 menores. De él se quiere seleccionar una muestra de 80 personas, utilizando, para ello, muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

4.32. Se realizan dos muestreos estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E1, E2, E3, E4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E1 y 30 de E2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E3 y 100 de E4. Sabiendo que el estrato E1 tiene 500 individuos y que el E3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras de cada estrato.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 4 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 5: FUNCIONES Y LÍMITE

5.1. Determina el dominio de:

a) $f(x)=x^3-x+1$ b) $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}$ c) $f(x)=\frac{1}{x^2-16}$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 1 – Ejercicio 1)

5.2. Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos $(1,1)$, $(0,0)$ y $(-1,1)$. Calcula a, b y c.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

5.3. Sea la función $y=\frac{a}{x-b}$. Calcula a y b sabiendo que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,1)$ y que el dominio de la función son todos los reales menos el valor $x=7$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

5.4. Estudia los límites laterales de $f(x)=\begin{cases} x+1 \ si \ x\leq 1 \\ 3x^2-1 \ si \ x>1 \end{cases}$ en el punto $x_0=1$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

5.5. Estudia los límites laterales de $f(x)=\begin{cases} x+1 \ si \ x\leq 0 \\ \frac{1}{x} \ si \ x>0 \end{cases}$ en el punto $x_0=0$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 2 – Ejercicio 2)

5.6. Estudia la continuidad de la función en $x=2$.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} \ si \ x\neq 2 \\ 3 \ si \ x=2 \end{cases}$$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

5.7. Indica el valor de k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x}{2x-2} \ si \ x\neq \frac{1}{2} \\ k \ si \ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $x=\frac{1}{2}$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 2 – Ejercicio 4)

5.8. Resuelve:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

5.9. Resuelve:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ b) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3+4x^2+x-6}$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{3-x}$ d) $\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x-6}$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

5.10. Resuelve:

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$ b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+6}{3x^3-x+5}$ c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}}$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

5.11. Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 4)

5.12. Sea $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4x-5}$. Estudia la continuidad en $x=-1$ y en $x=5$. Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 5)

5.13. Estudia la continuidad de la función en $x=-2$ y en $x=3$.

$$f(x)=\begin{cases} 2 \ si \ x<-2 \\ -x^2+6 \ si \ -2\le x\le 3 \\ 1 \ si \ x>3 \end{cases}$$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 6)

5.14. Determina a y b para que la función sea continua en los puntos frontera.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ si \ x<0 \\ a\,x+b \ si \ 0\le x\le 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} \ si \ x>3 \end{cases}$$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 7)

5.15. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} \ si \ x\neq 1 \ y \ x\neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} \ si \ x=1\end{cases}$ sea continua en $x=1$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 8)

5.16. Analiza la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} bx^2+ax \ si \ x<-1 \\ \frac{a}{x} \ si \ -1\le x<1, \ x\neq 0 \\ \frac{x^2+ax+1}{x+1} \ si \ x>1 \end{cases}$ en los puntos frontera $x=-1$ y $x=1$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 3 – Ejercicio 9)

5.17. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x)=\frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x)=\frac{2x+5}{3x}$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

5.18. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

5.19. Sea la función $f(x)=\frac{k}{(x-a)(2x-1)}$. Hallar los parámetros a y k sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una A.V.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

5.20. Sea la función $g(x)=\frac{m\,x^3}{(x-n)^2}$. Hallar los parámetros m y n sabiendo que la recta $y=2x-4$ es una asíntota de la función.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 4 – Ejercicio 4)

5.21. Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} \ si \ x<-1 \\ a\,x+b \ si \ -1\le x<1 \\ \frac{x^2}{x+1} \ si \ x\ge 1 \end{cases}$ siendo a y b números reales.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

5.23. Representa gráficamente $f(x)=(x-2)^2+3$ tomando como referencia la gráfica de $g(x)=x^2$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

5.24. El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x+7200}{2x+1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x = 0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

b) ¿Y dentro de dos años?

c) ¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

5.25. Sea $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$, donde $a,\ b$ y c son números reales. Calcula los valores de $a,\ b$ y c sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 2$, y que la gráfica pasa por el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 5 – Ejercicio 3)

5.26. Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0ºC se calienta y su dilatación viene dada por una función lineal $L = a + bt$, donde L es la longitud en cm y t es la temperatura grados Celsius.

Halla la expresión analítica de L, sabiendo que $L(1) = 30{,}0005\ cm$ y que $L(3) = 30{,}0015cm$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 5 – Ejercicio 4)

5.27. Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 5 – Apartado 5 – Ejercicio 5)

EJERCICIOS ESENCIALES TEMA 6: DERIVADAS

6.1. Halla la derivada de $f(x) = 5x^2 + 2x - 6$ en $x = -2$ mediante la definición formal de derivada.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 1 – Ejercicio 1)

6.2. Deriva aplicando la tabla de derivación:

a) $f(x) = \frac{1}{2x^3+1}$ b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

c) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 2}$ d) $f(x) = \frac{ln(x)}{e^x}$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 1 – Ejercicio 2)

6.3. Calcula el crecimiento, decrecimiento y las abscisas de los extremos relativos de $f(x) = x^3 - x$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

6.4. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$, hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 2)

6.5. Determina el punto (x, y) de la función $f(x) = x^3 - x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 3)

6.6. Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ en $x = -2$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 4)

6.7. Sea la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 - \frac{2x}{3} - 4$. Hallar los valores x de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0 = 2x + 3y - 4$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 5)

6.8. Sea la función definida por $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ para $x > 0$ y $x \neq 1$.

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = e$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 6)

6.9. Calcule a y b para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ pase por el punto $(-1, 6)$ y su recta tangente en $x = 1$ forme un ángulo de $45°$ con el eje OX.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 7)

6.10. Obtener la recta tangente y normal a $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$ en $x = 0$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 8)

6.11. Sea la función $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 2 – Ejercicio 9)

6.12. Sea la función $f(x) = x^2 - 8 \cdot \ln(x)$ definida en el dominio $[1, +\infty]$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcula los extremos relativos de la función y obtén el valor de la ordenada en cada extremo.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 3 – Ejercicio 1)

6.13. Sea $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Hallar los extremos relativos y la ecuación de la recta tangente en el punto $x = e$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 3 – Ejercicio 2)

6.14. Hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

6.15. Obtener, si existen, los puntos de inflexión de $g(x) = e^x - x$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 2)

6.16. Sea $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la función en el punto de inflexión.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 4 – Ejercicio 3)

6.17. Obtener los extremos absolutos de $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2,4]$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

6.18. Determina los valores $a,\ b\ y\ c$ de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para que tenga un mínimo relativo en $x = 2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1) = 2$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

6.19. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función polinómica que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Determinar $a,\ b,\ c$ y d. ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 6 – Ejercicio 2)

6.20. Obtener a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ tenga en $x = 1$ un punto crítico que no es extremo relativo y que la gráfica pase por el punto (1, 1).

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 6 – Ejercicio 3)

6.21. Resuelve:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ c) $\lim_{x\to \infty} \frac{ln(x)}{x}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x}$

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

6.22. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x \ \ si \ \ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 \ \ si \ \ x > 2 \end{cases}$. Calcular a y b para que la función sea derivable en $x = 2$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 8 – Ejercicio 1)

6.23. Sea la función $f(x) = \begin{cases} a - x \ \ si \ \ x \le 1 \\ \frac{b}{x} + \ln(x) \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$ continua y derivable en $x = 1$. Obtener a y b.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 8 – Ejercicio 2)

6.24. Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo.

Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 9 – Ejercicio 1)

6.25. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = \frac{-t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde t=1 (lunes) hasta t=8 (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en qué día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 9 – Ejercicio 2)

6.26. Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años de vida, en millones de euros, vienen dados por la función:

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9$$

Donde t es el tiempo transcurrido en años.

a) Estudia la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) Representa gráficamente la función en el intervalo [0, 8] y explicar en este intervalo la evolución de los beneficios.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 9 – Ejercicio 3)

6.27. Una empresa que fabrica bolsos estima que los costes de producción para x unidades son:

$$C(x) = 0.2x^2 - 50x + 2500$$

Si cada bolso se vende a 90 euros, se pide:

a) Determinar la función beneficio (ingresos menos coste) en función de x (número de unidades producidas), asumiendo que se vende todo lo que se produce.

b) ¿Cuántas unidades deben venderse para que los beneficios sean máximos?

c) Hallar el valor de dichos beneficios máximos.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 9 – Ejercicio 4)

6.28. En una granja dedicada a la cría de pollos, el peso de los mismos en función de la edad viene dado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} -x^2 + bx \ \ si \ 0 \leq x \leq 21 \\ c \ \ si \ \ x > 21 \end{cases}$$

Donde x representa la edad en días y P el peso en gramos. Se sabe que la función es continua y que a los 14 días un pollo pesa 2198 gramos.

a) Determinas las constantes b y c.

b) Representar gráficamente el peso en función de x.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 9 – Ejercicio 5)

6.29. Halla la primitiva de $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ que pase por el punto (0, 1).

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 10 – Ejercicio 1)

6.30. Determina la función $F(x)$ sabiendo que $F''(x) = 12x + 3$ y que $F(1) = 2$ y que $F'(0) = 3$.

(solución: 1º Bach CCSS – Tema 6 – Apartado 10 – Ejercicio 2)

Documento revisado y actualizado a fecha de 15 de septiembre de 2025.

Cualquier sugerencia o error detectado puede ser enviado al email danipartal@gmail.com .

Gracias por la ayuda de tantos alumnos que, durante años, han colaborado con la mejora de los contenidos de la web.