MATEMÁTICAS APLICADAS II

Resumen de Teoría y Ejercicios

$$|\alpha_{42}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

COLEGIO MARISTA "LA INMACULADA" (GRANADA)
Profesor: Daniel Partal García – www.danipartal.net

BREVE DESCRIPCIÓN

El presente documento muestra el índice de contenidos de la asignatura de Matemáticas Aplicadas II de 2ºBachillerato, el resumen de teoría y un listado de ejercicios esenciales (con la referencia a su solución en la web de la asignatura). El desarrollo completo de los materiales está disponible en la web de la asignatura: www.danipartal.net .

EVALUACIÓN	TEMA (EXAMEN ACUMULATIVO AL FINALIZAR CADA TEMA)
1ª Evaluación de septiembre a noviembre	Tema 1: Repaso y ampliación sobre Funciones, Límites y Derivadas de 1ºBachillerato (sesiones 1-25)
	Tema 2: Integrales (sesiones 26-39)
2ª Evaluación de diciembre a febrero	Tema 3: Sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales (repaso y ampliación sobre programación lineal de 1ºBachillerato)
	Tema 4: Matrices y determinantes
3ª Evaluación de marzo a mayo	Tema 5: Probabilidad (repaso y ampliación de 1ºBachillerato)
	Tema 6: Estadística (repaso y ampliación de 1ºBachillerato)
Examen global final de mayo	Examen de hora y media de duración con el que subir la nota obtenida al finalizar la tercera evaluación

Las **actividades de calificación trimestrales** son:

- Tres pruebas escritas sin ayuda de apuntes personales.
- Explicaciones de problemas en la pizarra, respuestas orales a las preguntas de clase, trabajo diario observado por el profesor, tareas de grupo realizadas en clase y en casa, y trabajo con software matemático en el aula.

Los **contenidos de las actividades se acumulan a lo largo del curso**. Las actividades de calificación dan una evaluación (de Insuficiente a Sobresaliente) de los 18 criterios de evaluación que la ley educativa marca para las asignaturas de Matemáticas Aplicadas I y II. Calcular la media de la asignatura como una media de esos 18 criterios de evaluación es una tarea compleja de comprender por el alumnado y sus familias. Por lo tanto, siendo prácticos en la vida y buscando la mejor preparación posible al examen de acceso a la Universidad, fijaremos el siguiente patrón: 90% de la calificación corresponde a la media de las pruebas escritas y el 10% de la calificación corresponde a la media del resto de actividades. Estos porcentajes son una aproximación al porcentaje de criterios evaluados en cada tipo de actividad.

La evaluación es continua a lo largo de todo el curso. Por lo tanto, la nota en cualquier instante se calcula con el 90% de la media de los exámenes y con el 10% de la media del resto de actividades.

Si resaltamos los criterios de evaluación más significativos de la asignatura, podemos destacar:

- Seleccionar la solución más adecuada de un problema usando el razonamiento y la argumentación.
- Demostrar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.
- Resolver problemas en contextos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas y usando diferentes enfoques.
- Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.
- Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.
- Afrontar las situaciones de incertidumbre y tomar decisiones, evaluando distintas opciones, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

La nota final de la asignatura se calcula tras la realización del examen del Tema 9, ofreciéndose un examen escrito global final para subir la nota a finales de mayo. En ese examen global, no se baja nota.

"Knowledge isn't free. You have to pay attention."
— Richard P. Feynman

TEMA 1: LÍMITES Y DERIVADAS

SESIÓN 1. Funciones: dominio, primeras indeterminaciones y continuidad

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre dominio de funciones del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=NZwqGK0p5HM&list=PL7rSsPjq_5KGTiW6LjmYd6LTDHoYD7Mb1

Lista de reproducción sobre límites, indeterminaciones, continuidad y asíntotas del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=U_DFaqrNIUo&list=PL7rSsPjq_5KExs1YUrZS5kfraI1B09dpJ

Una función de variable real $f(x)$ necesita de un dominio de definición, que son los valores de la variable real x que pueden ser sustituidos en la ecuación de la función.

- El dominio de un polinomio es toda la recta real.
- El dominio de una suma, resta o producto de funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ es la intersección de los dominios de cada función: $Dom(f)\cap Dom(g)$.
- El dominio de un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la intersección de los dominios de cada función menos los valores que anulan al denominador: $Dom(f)\cap Dom(g)-\{x\in\mathcal{R}\,/\,g(x)=0\}$
- El dominio de la raíz cuadrada de una función $\sqrt{f(x)}$ implica resolver la inecuación $f(x)\geq 0$.
- El dominio del logaritmo de una función $\ln[f(x)]$ implica resolver la inecuación $f(x)>0$.

Una función es continua en su dominio si podemos dibujar la gráfica de la función sin levantar la mano del papel.

Preguntarnos por el límite de la función $f(x)$ cuando el valor de la variable x se acerca a x_0 significa conocer el valor de la imagen de la función al que tendemos conforme nos acercamos más y más (sin llegar a alcanzar) al valor x_0.

$$L=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Podemos acercarnos por la derecha (límite lateral derecho) o por la izquierda (límite lateral izquierdo) de x_0.

$$L^+=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\ ,\ L^-=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

¿Cómo calcular un límite? Lo más práctico es evaluar $x=x_0$ en la ecuación de la función. Si el resultado es un número real, hemos terminado y ese número real es el valor del límite. Pero si obtenemos una indeterminación, deberemos aplicar las técnicas de resolución de límites. En límites sobre cociente de polinomios, o con raíces cuadradas de polinomios, encontraremos las siguientes indeterminaciones:

- Indeterminación $\frac{k}{0}$ siendo k un valor real no nulo: No estamos dividiendo por 0, sino que el denominador "se acerca" a 0 tanto como queramos (sin llegar a ser nunca 0). En este caso, tendremos que calcular los límites laterales, que se dispararán a más o a menos infinito.
- Indeterminación $\frac{0}{0}$: En cociente de polinomios, factorizamos, simplificamos y evaluamos para resolver la indeterminación. Si aparecen raíces de polinomios, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la parte de la fracción que contiene a la raíz. Y tras aplicar el conjugado, tendremos que simplificar y evaluar.
- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: En cociente de polinomios, dividiremos por la máxima potencia de la variable. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces de polinomios, debemos tener en cuenta que, por ejemplo, la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2, en el infinito, se comporta como un polinomio de grado 1. Ya que, en el infinito, el comportamiento de un polinomio lo marca el término con el mayor grado (y la raíz cuadrada de un polinomio de grado 2 se aproxima a un polinomio de grado 1 cuando x tiende a infinito).
- Indeterminación $\infty-\infty$: En fracciones de polinomios, aplicamos m.c.m. Para después simplificar y evaluar. Si aparecen raíces cuadradas, podemos multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión que contiene a la raíz. Para después, simplificar y volver a evaluar.

En límites cuando $x\to-\infty$ es bastante práctico cambiar en el límite $-\infty$ por $+\infty$ y cambiar en la función x por $-x$.

Para conocer la continuidad de una función en un punto concreto x_0 del dominio, como puede ser el punto frontera en una función definida a trozos, aplicamos las tres condiciones de continuidad en un punto:

- $\exists f(x_0)$
- $L^+=L^-=L\epsilon\mathcal{R}$
- $f(x_0)=L$

Problema 1 Sesión 1 (nivel inicial)

Razona de manera justificada el dominio de la función $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 2 de Funciones – Ejercicio 3)

Problema 2 Sesión 1 (nivel inicial)

Determina a y b para que la función sea continua en los puntos frontera: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ si\ x<0 \\ a\,x+b \ si\ 0\leq x\leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} \ si\ x>3 \end{cases}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 8 de Límites – Ejercicio 2)

SESIÓN 2. Funciones: asíntotas

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre dominio de funciones del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=NZwqGK0p5HM&list=PL7rSsPjq_5KGTiW6LjmYd6LTDHoYD7Mb1

Lista de reproducción sobre límites, indeterminaciones, continuidad y asíntotas del canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=U_DFaqrNIUo&list=PL7rSsPjq_5KExs1YUrZS5kfraI1B09dpJ

Los candidatos a A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio, o los puntos frontera de los intervalos que definen al dominio. Deberemos estudiar los límites laterales y comprobar si al menos uno de ellos se dispara a más o a menos infinito. La A.V. es una recta vertical $x = x_0$ que no es atravesada por la función.

La A.H. estudia el comportamiento de la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.H. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.H. en $x \to -\infty$. La A.H. es una recta horizontal $y = k$ que cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = k \in \mathcal{R}$.

La A.O. es una recta con pendiente no nula a la que tiende la función en el infinito. En cociente de polinomios, si existe A.O. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.O. en $x \to -\infty$. La A.O. es una recta $y = m\,x + n$ donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - m\,x]$$

En cociente de polinomios, si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, tendremos A.H. Si el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, tendremos A.O.

En un resumen como este documento, no hay espacio para mostrar las gráficas de las funciones elementales más usuales en bachillerato (seno, exponencial, parábola, etc.). Pero sí dejo enlace a un conjunto de gráficas que es muy recomendable memorizar:

https://www.geogebra.org/m/rscebhak#material/w9ehemkc (1ºBach - Tema 8 – Apartado 1 de Funciones)

Problema 1 Sesión 2 (nivel inicial)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{1-2\,x^2}{x^2-1}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 10 de Límites – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 2 (nivel inicial)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 10 de Límites – Ejercicio 2)

SESIÓN 3. Funciones: asíntotas (continuación)

Problema 1 Sesión 3 (nivel inicial)

Obtener los puntos de corte entre las parábolas $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 + 8$. Ayuda: Recuerda que los puntos de corte de la gráfica de dos funciones tienen una coordenada horizontal y una coordenada vertical (x, y).

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 1 – Ejercicio 3)

Problema 2 Sesión 3 (nivel medio)

Obtener el valor de a que cumple: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+ax} - 2x) = \frac{1}{3}$

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 5 de Límites – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 3 (nivel inicial)

El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x+7200}{2x+1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x = 0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

b) ¿Y dentro de dos años?

c) ¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 7 de Límites – Ejercicio 8 del PDF de problemas resueltos 7b)

Problema 4 Sesión 3 (nivel medio)

Sea $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$, donde a, b y c son números reales. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 2$, y que la gráfica pasa por el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(solución: 1º Bach – Tema 8 – Apartado 9 de Límites – Ejercicio 1)

SESIÓN 4. Funciones: definición formal, tabla de derivadas e interpretación geométrica

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: ¿Cómo podemos usar el logaritmo en base 10 para saber cuántas cifras tiene el número 99? ¿Y el número 101? ¿Y el número 999? ¿Y el número 1001?

La derivada es una medida del crecimiento de una función. Si la derivada de una función en un punto del dominio es positiva, implica que la función es estrictamente creciente en ese punto. Si la derivada es negativa, significa que la función es estrictamente decreciente en ese punto:

- $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ función estrictamente creciente en x_0
- $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ función estrictamente decreciente en x_0
- $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ punto crítico en x_0 (puede ser máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión)

La definición formal de derivada coincide con la Tasa de Variación Media cuando la anchura del intervalo (h) tiende a cero.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El valor de la derivada evaluada en un punto x_0 coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x_0 . Es decir:

$$m_{tangente} = f'(x_0)$$

Por lo tanto, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función en el punto x_0 es:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

Función constante

$y(x) = k \rightarrow y'(x) = 0$

Función identidad

$y(x) = x \rightarrow y'(x) = 1$

Función potencia

$y(x) = x^n \rightarrow y'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$y(x) = [f(x)]^n \rightarrow y'(x) = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

Función raíz cuadrada

$y(x) = \sqrt{x} \rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y(x) = \sqrt{f(x)} \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Función inversa

$y(x) = \frac{1}{x} \rightarrow y'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$y(x) = \frac{1}{f(x)} \rightarrow y'(x) = \frac{-f\prime(x)}{[f(x)]^2}$

Función logaritmo

$y(x) = \ln(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{x}$

$y(x) = \ln[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)}$

$y(x) = \log_a(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$

$y(x) = \log_a[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)} \cdot \log_a(e)$

Función exponencial

$y(x) = e^x \rightarrow y'(x) = e^x$

$y(x) = e^{f(x)} \rightarrow y'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$y(x) = a^x \rightarrow y'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

$y(x) = a^{f(x)} \rightarrow y'(x) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$

Funciones trigonométricas

$y(x) = sen(x) \rightarrow y'(x) = \cos(x)$

$y(x) = sen[f(x)] \rightarrow y'(x) = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$

$y(x) = \cos(x) \rightarrow y'(x) = -sen(x)$

$y(x) = \cos[f(x)] \rightarrow y'(x) = -sen[f(x)] \cdot f'(x)$

$y(x) = tg(x) \rightarrow y'(x) = 1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$y(x) = tg[f(x)] \rightarrow y'(x) = (1 + tg^2[f(x)]) \cdot f'(x) = \frac{1}{\cos^2[f(x)]} \cdot f'(x)$

$y(x) = cotg(x) \rightarrow y'(x) = -1 - cotg^2(x) = \frac{-1}{sen^2(x)}$

$y(x) = cotg[f(x)] \rightarrow y'(x) = (-1 - cotg^2[f(x)]) \cdot f'(x) = \frac{-1}{sen^2[f(x)]} \cdot f'(x)$

$y(x) = arcosen(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y(x) = arcosen[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$

$y(x) = arcocos(x) \rightarrow y'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y(x) = arcocos[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$

$y(x) = arcotg(x) \rightarrow y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$y(x) = arcotg[f(x)] \rightarrow y'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$

Función potencial-exponencial

$y(x) = x^x \rightarrow y'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$

$y(x) = f(x)^{g(x)} \rightarrow y'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \ln[f(x)] \cdot g'(x) + g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x)$

Suma y diferencia de funciones

$y(x) = f(x) + g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x) + g'(x)$

La derivada de la suma es la suma de las derivadas

$y(x) = f(x) - g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x) - g'(x)$

La derivada de la resta es la resta de las derivadas

Producto de funciones

$y(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

La derivada del producto es la derivada del primero por el segundo sin derivar más el primero sin derivar por el segundo derivado.

Producto de constante por una función

$y(x) = k \cdot f(x), k \in \mathbb{R} \rightarrow y'(x) = k \cdot f'(x), k \in \mathbb{R}$

La derivada de una constante por una función, es igual a la constante por la derivada de la función.

Cociente de funciones

$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y'(x) = \frac{f\prime(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g\prime(x)}{[g(x)]^2}$

La derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo ello partido por el denominador al cuadrado.

Regla de la cadena para la derivación de la composición de funciones

$y(x) = f[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$y(x) = f[g[h(x)]] = f'[g[h(x)]] \cdot g'[h(x)] \cdot h'(x)$

Problema 1 Sesión 4 (nivel inicial)

Aplica la definición formal de derivada a $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 4 (nivel inicial)

Determina el punto de $f(x) = x^3 - x$ donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a 74.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

Problema 3 Sesión 4 (nivel inicial)

Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ en $x = -2$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 5 – Ejercicio 2)

SESIÓN 5. Funciones: condición necesaria y suficiente de extremos relativos

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

Los puntos críticos son los puntos que anulan la primera derivada. Esta condición también se conoce como condición necesaria de extremo relativo:

$$x_0 \text{ es un punto crítico si } f'(x_0) = 0 \text{ (condición necesaria de extremo relativo)}$$

Los puntos críticos pueden ser máximos relativos (suaves), mínimos relativos (suaves) o puntos de inflexión.

Para discriminar si un punto crítico es un extremo relativo, aplicamos la condición suficiente de extremo relativo. Hay dos formas de aplicar a un punto crítico la condición suficiente de extremo relativo:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos críticos. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la primera derivada. Si hay cambio de signo en la derivada a la izquierda y a la derecha de un punto crítico, tendremos un extremo relativo.
    - Cambio de derivada positiva a derivada negativa, indica un máximo relativo (paso de creciente a decreciente).
    - Cambio de derivada negativa a derivada positiva, indica un mínimo relativo (paso de decreciente a creciente).
    - Si no hay cambio de signo en la derivada, es un punto de inflexión.
- Segunda forma: Calcular la segunda derivada y evaluarla en el punto crítico (forma recomendada para polinomios, porque son muy fáciles de derivar).
    - Segunda derivada negativa en el punto crítico, indica un máximo relativo.
    - Segunda derivada positiva en el punto crítico, indica un mínimo relativo.
    - Segunda derivada nula en el punto crítico, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

Problema 1 Sesión 5 (nivel inicial)

Sea $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Hallar los extremos relativos y la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x = e$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 2)

Problema 2 Sesión 5 (nivel medio)

Hallar los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 4)

Problema 3 Sesión 5 (nivel medio)

Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 7 – Ejercicio 5)

SESIÓN 6. Funciones: condición necesaria y suficiente de extremos relativos (continuación)

Problema 1 Sesión 6 (nivel inicial)

Sea $f(x) = (x-a)e^x$. Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en x=0.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 5)

Problema 2 Sesión 6 (nivel inicial)

Determina los valores $a,\ b\ y\ c$ de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para que tenga un mínimo relativo en $x = 2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1) = 2$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 6 (nivel medio)

9.45. Obtener a, b y c para que la función $f(x) = \frac{a\,x^2+b}{x+c}$ tenga una A.V. en $x = 1$, una A.O. de pendiente 2 y un extremo local suave en el punto de abscisa $x = 3$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 17)

SESIÓN 7. Funciones: condición necesaria y suficiente de puntos de inflexión

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Encontrar un número de dos cifras que al dividirlo por el producto de sus dígitos dé 3 de cociente y al que, si se le añade 18, los dígitos quedan invertidos.

La segunda derivada es una medida de la curvatura (concavidad o convexidad) de una función:

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ función convexa ∪ en x_0
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ función cóncava ∩ en x_0
- $f''(x_0) = 0 \rightarrow$ candidato a punto de inflexión en x_0 (no todos los puntos de inflexión son puntos críticos)

La condición necesaria de punto de inflexión es anular la segunda derivada:

$$x_0 \ es \ un \ \ candidato \ a \ punto \ de \ inflexión \ si \ f''(x_0) = 0 \ (condición \ necesaria \ de \ punto \ de \ inflexión)$$

También existen dos formas de aplicar a un candidato a punto de inflexión la condición suficiente de punto de inflexión:

- Primera forma: Situar en la recta real los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos candidatos a puntos de inflexión. Formar intervalos. Coger un punto de cada intervalo y evaluar la segunda derivada. Si hay cambio de signo en la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto candidato, tendremos un punto de inflexión.
    - Cambio de segunda derivada positiva a segunda derivada negativa, indica un punto de inflexión (paso de convexa a cóncava).
    - Cambio de segunda derivada negativa a segunda derivada positiva, indica un punto de inflexión (paso de cóncava a convexa).
    - Si no hay cambio de signo en la segunda derivada, no hay punto de inflexión.
- Segunda forma: Calcular la tercera derivada y evaluarla en el candidato a punto de inflexión (forma recomendada para polinomios, por ser fáciles de derivar).
    - Tercera derivada negativa en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de convexa a cóncava.
    - Tercera derivada positiva en el candidato, indica un punto de inflexión con paso de cóncava a convexa.
    - Tercera derivada nula en el candidato, no podemos afirmar nada (aplicar la primera forma de la condición suficiente).

Problema 1 Sesión 7 (nivel medio)

Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de curvatura de $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 9 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 7 (nivel medio)

Sea $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la función en el punto de inflexión.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 9 – Ejercicio 3)

Problema 3 Sesión 7 (nivel medio)

Obtener a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ tenga en $x = 1$ un punto crítico que no es extremo relativo y que la gráfica pase por el punto $(1, 1)$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 14)

SESIÓN 8. Funciones: condición necesaria y suficiente de puntos de inflexión (continuación)

Problema 1 Sesión 8 (nivel medio)

Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 7 – Ejercicio 7)

Problema 2 Sesión 8 (nivel avanzado)

Sea la función $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ definida en el dominio $[1, \infty)$. Estudia su crecimiento, su decrecimiento, su concavidad, su convexidad, sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 8b – Ejercicio 2)

SESIÓN 9. Funciones: derivabilidad y regla de L'Hôpital

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

Regla de L'Hôpital: En límites $L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con indeterminación $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, si existe el límite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ coincide con el límite de partida L. Si tras aplicar L'Hôpital dos veces de forma consecutiva, volvemos al límite de partida, significa que nuestro límite no puede ser resuelto con esta regla. Por ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

En indeterminaciones $0\cdot\infty$ buscamos convertir el límite en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital. Para ello, convertimos el límite en un cociente de funciones.

- Un ejemplo de cómo conseguir un cociente dentro de un límite, lo tenemos en $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0\cdot(-\infty)$. Si expresamos x como $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ tendremos $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$ y podremos aplicar L'Hôpital.

Una función es derivable en un punto x_0 del dominio si la función es continua y suave en ese punto. Las tres condiciones de continuidad en un punto ya las hemos repasado. La condición de suavidad en un punto (por ejemplo, en el punto frontera de una función a trozos) es que las derivadas laterales sean iguales:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Si al calcular una derivada lateral obtenemos una indeterminación, no olvidemos que estamos ante un límite sobre la función derivada. Por lo que podemos aplicar las técnicas de resolución de límites.

Problema 1 Sesión 9 (nivel inicial)

Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln(x)}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 7)

Problema 2 Sesión 9 (nivel medio)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 9)

Problema 3 Sesión 9 (nivel medio)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)} = 1$, calcula los valores de a y b.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 13 – Ejercicio 15)

SESIÓN 10. Funciones: derivabilidad y regla de L'Hôpital (continuación)

Problema 1 Sesión 10 (nivel medio)

Obtener b y c para que $f(x)=\begin{cases} x^2+b\,x+c \;\; si \;\; x\leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} \;\; si \;\; x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto frontera.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 15 – Ejercicio 17)

Sesión 10 (nivel medio)

1.37. Obtener a y b para que $f(x)=\begin{cases} a\cos(x)+2\,x \;\; si \;\; x\leq 0 \\ a^2\ln(x+1)+\frac{b}{x+1} \;\; si \;\; x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto frontera.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 15 – Ejercicio 19)

SESIÓN 11. Funciones: problemas de optimización, diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos, estudio completo de una función

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: ¿Pará que valores de b la parábola $f(x) = 9x^2 + bx + 4$ corta una sola vez al eje de abscisas?

Ya hemos estudiado los extremos relativos (también llamados extremos locales): anulan la primera derivada (condición necesaria), cumplen la condición suficiente de extremo relativo, y sus picos y valles son suaves por ser la función derivable en esos puntos (no son puntos angulosos).

Los extremos absolutos son los que representan la imagen más grande de la función (máximo absoluto) o la imagen más pequeña de la función (mínimo absoluto). Si tenemos la gráfica de la función, es fácil detectar los extremos absolutos. El estudio completo de una función incluye: dominio, corte con los ejes, simetría, asíntotas, monotonía y extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión, dibujo de la gráfica.

No obstante, si nos piden detectar los extremos absolutos de una función $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ podemos razonar sin necesidad de realizar un estudio completo de la gráfica:

- Obtenemos el dominio y los extremos relativos que pertenezcan al intervalo $[a, b]$.
- Realizamos una tabla de valores de la imagen de $f(x)$ tanto en los extremos relativos como en el inicio (a) y en el final (b) del intervalo. La imagen más grande corresponderá al máximo absoluto en el intervalo. La imagen más pequeña indicará el mínimo absoluto en el intervalo.

En los problemas de optimización encontramos un enunciado del cual debemos obtener información para conseguir una función suave de una sola variable, que tendremos que optimizar (encontrar el valor del dominio que genera la imagen más grande o la imagen más pequeña). Debemos estudiar el dominio y buscar los extremos relativos de esa función y los extremos absolutos. Con frecuencia, en estos problemas aparece un único extremo relativo, por lo que es fácil razonar así: si solo aparece un extremo relativo en el dominio, ese extremo también será absoluto.

Problema 1 Sesión 11 (nivel inicial)

Obtener a, b y c para que la función $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ tengo un extremo absoluto en punto $(2, -4)$ y su segunda derivada en $x = 2$ valga 4.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 11 (nivel medio)

Obtener a, b y c para que la función $f(x) = \frac{a\,x^2+b}{x+c}$ tenga una A.V. en $x = 1$, una A.O. de pendiente 2 y un extremo local suave en el punto de abscisa $x = 3$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 12 – Ejercicio 17)

Problema 3 Sesión 11 (nivel medio)

Sea la función $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ definida en el dominio $[1, 100]$. Obtener los extremos absolutos en el dominio.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 8b – Ejercicio 2)

SESIÓN 12. Funciones: problemas de optimización, diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos, estudio completo de una función (continuación)

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Lista de reproducción sobre derivadas canal de la asignatura (danipartal) https://www.youtube.com/watch?v=B0tbULVCwiA&list=PL7rSsPjq_5KHBQUCmuNISVc26NVj6FCQA

Problema 1 Sesión 12 (nivel medio)

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 1)

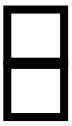
Problema 2 Sesión 12 (nivel medio)

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=e^{-x^2}$.

(solución: 1º Bach – Tema 9 – Apartado 17 – Ejercicio 8)

SESIÓN 13. Funciones: problemas de optimización, diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos, estudio completo de una función (continuación)

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Imagina un ser vivo inmortal que, en un día, pasa de estado cría a estado adulto. Un cuadrado blanco simboliza a la cría. Y la unión de dos cuadrados blancos representa al adulto.

Cría	Adulto
	

Cuando un ser vivo se convierte en adulto, al día siguiente genera una nueva cría. Los adultos siguen generando nuevas crías cada día de vida. Recuerda que es un ser vivo inmortal. Con estas sencillas reglas, ¿cómo crece la población de seres vivos?

Supongamos que el 1 de enero colocamos una sola cría en un hábitat favorable para su desarrollo. El 2 de enero la cría se convierte en adulto. El 3 de enero, el adulto genera una cría. El 4 de enero, el primer adulto sigue generando una nueva cría, mientras que la cría del 3 de enero se convierte en el segundo adulto.

La siguiente tabla muestra el número de seres vivos cada día. ¿Cuántos seres vivos habrá el 7 de enero? ¿Eres capaz de deducir una fórmula que dé el número de seres vivos de un día, a partir del dato de cuántos seres vivos hay en días anteriores?

Fecha	Número de seres vivos
día 0 (31 de diciembre)	0
día 1 (1 de enero)	1
día 2	1
día 3	2
día 4	3
día 5	5
día 6	8
día 7	¿?

Problema 1 Sesión 13 (nivel medio)

Obtener los extremos absolutos de $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2,4]$.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Estudiar Funciones 9)

Problema 2 Sesión 13 (nivel medio)

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

(solución: 2ºBach – Sesiones preparatorias a Selectividad – PDF funciones – Ejercicio Estudiar Funciones 8)

SESIÓN 14. Otra vuelta de tuerca con las asíntotas

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Repaso de gráficas de funciones elementales. Geogebra proyectar gráficas para memorizar https://www.geogebra.org/m/rscebhak#material/w9ehemkc

---

Los candidatos a A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio, o los puntos frontera de los intervalos que definen al dominio. Deberemos estudiar los límites laterales y comprobar si al menos uno de ellos se dispara a más o a menos infinito.

Si una función está definida en el dominio cerrado $[a,b]$ o abierto (a,b) no tiene sentido preguntarse por el límite lateral a la izquierda de a ni por el límite lateral a la derecha de b, porque la función no está ahí definida.

En cociente de polinomios, si existe A.H. o A.O. en $x \to +\infty$, coincidirá con la A.H. o A.O. en $x \to -\infty$.

¡Ojo! Si no es un cociente de polinomios, hay que estudiar por separado la A.H. o A.O. tanto en $x \to +\infty$ como en $x \to -\infty$.

En cociente de polinomios, si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, tendremos A.H. En cociente de polinomios, si el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, tendremos A.O.

Una función $f(x)$ puede cortar a su A.H. o A.O. Para calcular los puntos de corte, igualamos la ecuación de la función con la ecuación de la asíntota.

Estudiar la posición relativa de una función respecto de su A.V. es simplemente estudiar los límites laterales para saber si la función se dispara a más o a menos infinito.

Estudiar la **posición relativa de una función respecto de su A.H. o A.O.** implica:

- Obtener los puntos de corte de la función con la asíntota.
- Situar en la recta real esos puntos de corte y los puntos que no pertenecen al dominio.
- Evaluar, en los intervalos que se forman en la recta real, la imagen de la función y la imagen de la asíntota.
- Donde la imagen de la función supere a la imagen de la asíntota, significa que la gráfica de la función queda por encima de la gráfica de la asíntota. Y viceversa.

Problema 1 Sesión 14 (nivel inicial)

Sea la función $f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)}$. Hallar los parámetros a y k sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x = 2$ es una A.V.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 5)

Problema 2 Sesión 14 (nivel medio)

Calcula las asíntotas de $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 4)

Problema 3 Sesión 14 (nivel inicial)

Sea la función $g(x) = \frac{m\,x^3}{(x-n)^2}$. Hallar los parámetros m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la función.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 6)

SESIÓN 15. Boceto de funciones

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Mates 1Bach - Derivadas - Capítulo 17 "Estudio y representación de funciones" https://www.youtube.com/watch?v=rpxVJ9KNLGQ

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Geogebra traslación vertical y horizontal en funciones

https://www.geogebra.org/m/n3uhymnf#material/tak2ugne

Geogebra (Arturo Olivares Martos) estudio y representación de una parábola

https://www.geogebra.org/m/mjtmjjmt#material/hq88en9s

Problema 1 Sesión 15 (nivel inicial)

Sean las funciones polinómicas $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$. Dibuja sus gráficas en el mismo sistema de referencia y calcula los puntos de corte entre ambas funciones.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 12)

Problema 2 Sesión 15 (nivel medio)

El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = \frac{-t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde t=1 (lunes) hasta t=8 (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en qué día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 6)

SESIÓN 16. Boceto de funciones (continuación)

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Boceto de cociente de polinomios y determinar si es inyectiva en su dominio maximal https://www.youtube.com/watch?v=VjPO2KygtWo

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Geogebra valor absoluto en gráficas de funciones

https://www.geogebra.org/m/n3uhymnf#material/ejpu49ad

Problema 1 Sesión 16 (nivel avanzado)

Estudia la continuidad y los tipos de discontinuidad de la función en los puntos frontera.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)}{x} & si\ -3<x<0\\ x^2+1 & si\ 0\le x<1\\ \dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-1} & si\ 1<x<5\end{cases}$$

(solución: 2º Bach – Tema 2 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

SESIÓN 17. Relación entre la gráfica de la derivada y la gráfica de la función original

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problema 9.39. Estudiar gráfica de la función derivada https://www.youtube.com/watch?v=0EtnwgI8SLE

Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problemas 9.33-9.34. Recta tangente y normal. Extremos absolutos

https://www.youtube.com/watch?v=bQejYDXz6X8

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Turning to Calculus (nrich)

https://nrich.maths.org/problems/turning-calculus

De la **gráfica de la función derivada** podemos obtener información de la gráfica de la función original:

- Los cortes x_0 de la gráfica de la derivada con el eje horizontal son los puntos críticos de $f(x)$.
  - Si el corte atraviesa al eje de abscisas de arriba abajo, tendremos un máximo relativo en x_0.
  - Si el corte atraviesa al eje de abscisas de abajo arriba, tendremos un mínimo relativo en x_0.
  - Si el corte no atraviesa al eje de abscisas, tendremos un punto de inflexión.
- Los extremos relativos de la gráfica de la derivada son los puntos de inflexión de $f(x)$.

La expresión "pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0" es sinónima de "valor de la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0". Es decir:

$$m_t = f'(x_0)$$

Por lo tanto, si deseamos **optimizar la pendiente de la recta tangente es lo mismo que optimizar la función derivada**. Es decir, los máximos y los mínimos de la pendiente de la recta tangente son los máximos y los mínimos de la función derivada. Conclusión: **los máximos y los mínimos de la pendiente de la recta tangente son los puntos de inflexión de la función original $f(x)$** .

Un máximo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más grande de todas.

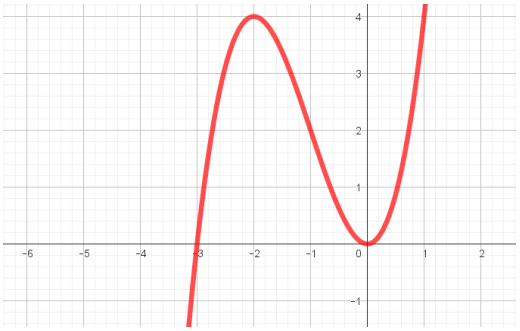
Un mínimo absoluto es aquel valor x_0 cuya imagen $f(x_0)$ es la más pequeña de todas.

Para obtener los extremos absolutos de una función en toda la recta real o en un dominio formado por un intervalo abierto, tendremos que hacer un boceto de la gráfica en el dominio que nos han dado. Pero si nos piden **estudiar los extremos absolutos en un intervalo cerrado** $[a, b]$, podemos razonar así:

- Calcular los extremos relativos (condición necesaria y condición suficiente).
- Obtener la imagen de los extremos relativos, la imagen de $x = a$ y la imagen de $x = b$.
- Decidir los extremos absolutos comparando el valor de estas imágenes calculadas.

Problema 1 Sesión 17 (nivel medio)

La gráfica de la imagen de la derecha muestra la gráfica de la función derivada $f'(x)$. Obtener la monotonía, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.



(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 4 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 17 (nivel avanzado)

Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

SESIÓN 18. Repaso de las diferencias entre extremos relativos y extremos absolutos

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Tema 9 de 1ºBach Mates Ciencias. Problemas 9.35-9.36. Optimización. Extremos relativos y absolutos https://www.youtube.com/watch?v=gv-ofxMvqSI

ACTIVIDAD INICIAL PARA PENSAR: Calculus Analogies (nrich)

https://nrich.maths.org/problems/calculus-analogies

Problema 1 Sesión 18 (nivel medio)

Estudia los extremos relativos y absolutos de $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 4)

Problema 2 Sesión 18 (nivel medio)

Sea la función $f(x)=x^2-8\ln(x)$ definida en el dominio $[1,\infty)$. Estudia su crecimiento, su decrecimiento, su concavidad, su convexidad, sus extremos relativos y sus extremos absolutos.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 7)

Problema 3 Sesión 18 (nivel medio)

Sea $f(x)=(x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en x=0.

b) Para $a=1$ calcula los puntos de inflexión de la función.

(solución: 2º Bach – Tema 3 – Apartado 7 – Ejercicio 12)

Problema 4 Sesión 18 (nivel medio)

Sea la función $f(x)=\frac{2x-6}{2-x}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.

b) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.

c) Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 11b – Ejercicio 3)

SESIÓN 19. Problemas con enunciado extenso y funciones a trozos

---

Problema 1 Sesión 19 (nivel medio)

a) Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot e^{x+1} & x\leq -1 \\ x^2-2 & -1<x<2 \\ b\cdot \log(12-x) & 2\leq x<12 \end{cases}$$

Siendo a y b números reales. Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en su dominio.

b) Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y=-x+3$ y la parábola $y=-x^2+5$.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 11b – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 19 (nivel medio)

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} 10+\dfrac{5x}{2} & x\leq -2 \\ x^2+1 & -2<x<2 \\ 10-\dfrac{5x}{2} & x\geq 2 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en el punto de abscisa $x=-2$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f con pendiente -1.

c) Represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 11b – Ejercicio 2)

SESIÓN 20. Problemas con enunciado extenso y funciones a trozos (continuación)

Problema 1 Sesión 20 (nivel medio)

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x+1 & si \quad x\leq 2\\ \frac{1}{x-1} & si \quad x>2\end{cases}$$

Estudie la continuidad, derivabilidad y monotonía de la función. Represente gráficamente dicha función.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 11b – Ejercicio 4)

Problema 2 Sesión 20 (nivel medio)

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax-1 & si \quad x\leq 1\\ \frac{b}{x} & si \quad 1<x\leq 3\\ \frac{x-a}{3} & si \quad x>3\end{cases}$$

Con a y b números reales.

a) Determine los valores a y b para que la función sea continua. Para dichos valores, estudia la derivabilidad de la función.

b) Para $a=5$ y $b=2$, represente el recinto limitado por la gráfica de la función, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje OX.

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 11b – Ejercicio 5)

SESIÓN 21. Problemas con enunciado extenso y funciones a trozos (continuación)

Problema 1 Sesión 21 (nivel medio)

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamente a las 00:00 para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12\,t^2+108\,t+108\right) & si\ \ 0\le t\le 12\\ t^2-40\,t+546 & si\ \ 12<t\le 24\end{cases}$$

a) Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.

b) ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?

c) ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 21 (nivel avanzado)

a) El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo:

$$f(t)=a\cdot t^2+b\cdot t+c,\qquad t\in[0{,}60]$$

Donde t es el tiempo medido en minutos y $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia, que es 36 puntos. Determine a,b,c y represente gráficamente la función obtenida.

b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right),\ h(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$$

(solución: 2ºBach CCSS – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 21 (nivel avanzado)

El nivel de concentración de un alumno universitario durante un examen viene dado por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+2\cdot t+10 & 0\le t\le 2{,}5\\ t^2+a\cdot t+b & 2{,}5<t\le 5\end{cases}$$

Donde t es el tiempo en horas y a y b son números reales.

a) ¿Con qué nivel de concentración el alumno comienza el examen? Determine los valores de a para que la función f sea continua y derivable en $t=2{,}5$.

b) Para $a=-8$ y $b=22{,}5$, esboce la gráfica de la función f, estudiando previamente la monotonía y calculando en qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de concentración.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicio 3)

SESIÓN 22. Problemas con enunciado extenso y funciones a trozos (continuación)

Problema 1 Sesión 22 (nivel medio)

El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = \frac{-t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde t=1 (lunes) hasta t=8 (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en qué día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicio 4)

Problema 2 Sesión 22 (nivel avanzado)

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función $v(t)$ nos indica, el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es:

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6, \ \ t\epsilon[0,6]$$

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v, y las abscisas de los extremos relativos.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 12 – Ejercicio 5)

SESIÓN 23. Problemas con enunciado extenso y funciones a trozos (continuación)

Problema 1 Sesión 23 (nivel medio)

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+3 & si \quad x<4\\ 2x-5 & si \quad x\geq 4\end{cases}$$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

c) Represente la región del plano limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 23 (nivel medio)

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decímetros cuadrados, coincide con el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+6x$ y $g(x)=\frac{x^2}{5}$. Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 2)

Problema 3 Sesión 23 (nivel medio)

Sean las funciones:

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si \quad -1\leq x\leq 1\\ (x-2)^2 & si \quad 1<x\leq 3\end{cases}$$

$$g(x)=1 \;\; si \;\; -1\leq x\leq 3$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de ambas funciones en sus dominios.

b) represente el reciento limitado por las gráficas de ambas funciones.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 3)

SESIÓN 24. Problemas con enunciado extenso y funciones a trozos (continuación)

Problema 1 Sesión 24 (nivel medio)

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & si\ \ x<2\\ x^2-2x & si\ \ x\geq 2\end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) Represente el recinto limitado por las rectas $y=2x$, $x=-1$, $x=1$ y la gráfica de la función.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 5)

Problema 2 Sesión 24 (nivel avanzado)

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}3+e^x & si\ \ x<1\\ x^2+ax+2 & si\ \ x\geq 1\end{cases}$$

a) Determine el valor de a para que la función sea continua en toda la recta real. Para ese valor de a, ¿es la función derivable?

b) Para $a=-3$, calcule la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=0$.

c) Para $a=-3$, represente la región limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje de abscisas.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 6)

SESIÓN 25. Problemas con enunciado extenso y funciones a trozos (continuación)

Problema 1 Sesión 25 (nivel avanzado)

Trinidad, una persona ahorradora, deposita 5.000€ en un fondo de inversión y el capital final que obtiene cuando transcurren t años viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 5.000 \cdot (1 + 0{,}05\, t) \;\; si \;\; 0 \leq t \leq 1 \\ 5.000 \cdot 1{,}05^{t} \;\; si \;\; t > 1 \end{cases}$$

a) ¿Cuánto tiempo debe mantener invertido el dinero si el capital final que se obtiene es de 5.931,19€?

b) Calcule los intereses que obtiene Trinidad entre el año 2 y el año 4, si se conoce que los intereses que genera esta inversión entre el año t_1 y el año t_2 vienen dados por $I = f(t_2) - f(t_1)$.

c) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

d) Estudie la monotonía de la función f y esboce su gráfica.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 7)

Problema 2 Sesión 25 (nivel avanzado)

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t) = 500.000 \cdot (1 - e^{-0.2 \cdot t})$$

Para $t > 0$.

a) Estudie la monotonía y la curvatura de la función N.

b) Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.

c) ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450.000 personas?

d) La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 8)

Problema 3 Sesión 25 (nivel avanzado)

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \quad 0 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \quad 10 < t \leq 24 \end{cases}$$

a) Comprueba que la función v es continua y derivable.

b) Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 1 – Apartado 13 – Ejercicio 9)

TEMA 2: INTEGRALES

SESIÓN 26. Tabla de integrales inmediatas

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 1 – "Integral indefinida" https://www.youtube.com/watch?v=hOSEMihyKJ4

Matemáticas 2ºBach – Integrales – "Tabla de integrales inmediatas"

https://www.youtube.com/watch?v=nJNtV3NgvaY

Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 2 – "Ideas felices para resolver integrales inmediatas" https://www.youtube.com/watch?v=zVwy5jYsRcY

Matemáticas 2ºBac – Integrales – Capítulo 3 – "Condiciones de contorno para obtener la constante de integración" https://www.youtube.com/watch?v=Ma-7pNctyjo

---

Sea una función $f(x)$. A toda función $F(x)$ cuya derivada coincida con $f(x)$ se le denomina primitiva de $f(x)$. Es decir:

$$F'(x) = \frac{d[F(x)]}{dx} = f(x)$$

Como la derivada de una constante real vale 0, tendremos infinitas primitivas que cumplen que su derivada coincida con la función $f(x)$.

$$\frac{d[F(x)+C]}{dx} = f(x)$$
$$Siendo\ C \epsilon \mathcal{R}$$

Definimos un proceso inverso al de la derivada, que llamaremos integral indefinida (también se le conoce como "antiderivada"). Y razonamos así: si la derivada de $F(x)$ coincide con $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ coincide con $F(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Hablamos de integral "indefinida" por la constante C que antes hemos mencionado: hay infinitas funciones resultantes de una integral indefinida porque la derivada de una constante vale 0.

Las integrales más sencillas son las integrales inmediatas. Se resuelven leyendo la tabla de derivadas de derecha a izquierda. Por ejemplo:

$$Si\ la\ derivada\ de\ f(x) = x^2\ es\ f'(x) = 2x$$
$$La\ integral\ de\ 2x\ es \int 2x\,dx = x^2 + C$$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

Función constante

$I = \int dx = x + C$

$I = \int kdx = kx + C, k \in \mathbb{R}$

Función potencia

$I = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$

$I = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{N}$

$I = \int kx^n dx = k\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Función raíz cuadrada

$I = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$

$I = \int \sqrt{x} dx = \int (x)^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$

$I = \int \sqrt[n]{x} dx = \int (x)^{1/n} dx = \frac{x^{(n+1)/n}}{(n+1)/n} + C, n \in \mathbb{N}$

Función inversa

$I = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$

$I = \int \frac{k}{x} dx = k\ln(x) + C, k \in \mathbb{R}$

$I = \int \frac{1}{x+k} dx = \ln(x+k) + C, k \in \mathbb{R}$

$I = \int \frac{-1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$

$I = \int \frac{-k}{x^2} dx = \frac{k}{x} + C, k \in \mathbb{R}$

$I = \int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C, n \in \mathbb{N}, n > 1$

$I = \int \frac{k}{x^n} dx = \int kx^{-n} dx = k\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C, k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$

$I = \int \frac{1}{(x+k)^n} dx = \int (x+k)^{-n} dx = \frac{(x+k)^{-n+1}}{-n+1} + C, k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$

Función exponencial

$I = \int e^x dx = e^x + C$

$I = \int ke^x dx = ke^x + C, k \in \mathbb{R}$

$I = \int e^{x+k} dx = e^{x+k} + C, k \in \mathbb{R}$

$I = \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C, k \in \mathbb{R}$

$I = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, a > 0$

Funciones trigonométricas

$I = \int sen(x) dx = -\cos(x) + C$

$I = \int sen(kx) dx = \frac{-\cos(kx)}{k} + C, k \in \mathbb{R}$

$I = \int \cos(x) dx = sen(x) + C$

$I = \int \cos(kx) dx = \frac{sen(kx)}{k} + C$

$I = \int tg(x) dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)} dx = -\ln(\cos(x)) + C$

$I = \int (1 + tg^2(x)) dx = tg(x) + C$

$I = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = tg(x) + C$

$I = \int cotg(x) dx = \int \frac{\cos(x)}{sen(x)} dx = \ln(sen(x)) + C$

$I = \int (-1 - cotg^2(x)) dx = cotg(x) + C$

$I = \int \frac{-1}{sen^2(x)} dx = cotg(x) + C$

$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcosen(x) + C$

$I = \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcocos(x) + C$

$I = \int \frac{1}{1+x^2} dx = arcotg(x) + C$

Suma y diferencia de integrales

$I = \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

La integral de la suma es la suma de las integrales.

$I = \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

La integral de la resta es la resta de las integrales.

Producto de funciones

$I = \int (f(x)g(x)) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

La integral del producto **NOOOOOOOOOO** es el producto de las integrales.

Producto de constante por una función

$I = \int kf(x) dx = k \int f(x) dx, k \in \mathbb{R}$

La integral de una constante por una función, es igual a la constante por la integral de la función.

Derivar es mecánico. Integrar, un arte...

Las integrales cumplen las condiciones de linealidad:

- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \rightarrow la\ integral\ de\ la\ suma\ es\ la\ suma\ de\ las\ integrales$
- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \rightarrow la\ integral\ de\ un\ número\ por\ una\ función\ es\ el\ número\ por\ la\ integral\ de\ la\ función$

Con una condición de contorno podemos determinar, de manera única, el valor de la constante de integración. Por ejemplo:

$$Obtener\ la\ primitiva\ de\ 2x\ que\ pase\ por\ el\ punto\ (1{,}0)$$

$$F(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$Si\ (1{,}0)\ pertenece\ a\ la\ gráfica\ de\ F(x) \rightarrow F(1) = 0 \rightarrow 1^2 + C = 0 \rightarrow C = -1$$

$$Solución\ que\ cumple\ la\ condición\ de\ contorno: F(x) = x^2 - 1$$

Problema 1 Sesión 26 (nivel medio)

Resuelve:

a) $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$ b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ c) $\int \frac{1}{x^3}dx$ d) $\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x}dx$ g) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 2 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 26 (nivel inicial)

Determina $F(x)$ sabiendo que $F(0) = -5$, que existe un mínimo relativo en x=2 y que $F''(x) = 6x^2 - 12x$.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 3 – Ejercicio 3)

SESIÓN 27. Integrales de cociente de polinomios con raíces simples en el denominador

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 5 – "Cociente de polinomios con raíces simples en el denominador" https://www.geogebra.org/m/d7esbrfq#material/jchrmugw

---

En integrales de cociente de polinomios:

- Si el grado del numerador P(x) es menor al grado del denominador Q(x), debemos obtener las raíces del denominador y aplicar el método de coeficientes indeterminados.
  - Si Q(x) tiene n-raíces simples: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \cdots + \frac{N}{x-x_n}$
  - Si Q(x) tiene una única raíz múltiple x_1 de multiplicidad n: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{(x-x_1)^3} + \cdots + \frac{N}{(x-x_n)^n}$
  - Si Q(x) tiene una raíz simple x_1 y una raíz múltiple x_2: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{N}{(x-x_2)^n}$
- Si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador, debemos realizar la división de polinomios para aplicar el Teorema del Resto: $\frac{P(x)}{Q(x)} = Cociente + \frac{Resto}{Q(x)}$. Recordando que el grado del polinomio del Resto debe ser inferior al grado del polinomio Q(x). Una vez aplicado el Teorema del Resto, llegaremos a la integral de un polinomio más la integral de un cociente de polinomios donde el grado del numerador es menor al grado del denominador (y podremos aplicar el método de coeficientes indeterminados explicado anteriormente).

Problema 1 Sesión 27 (nivel medio)

Resuelve:

a) $\int \frac{x}{x^2+x-6} dx$

b) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)} dx$

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 2) apartado a)

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 4 – Ejercicio 3) apartado b)

SESIÓN 28. Integrales de cociente de polinomios con raíces múltiples en el denominador

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 6 – "Cociente de polinomios con raíces múltiples en el denominador" https://www.youtube.com/watch?v=tzctiC94jGQ

Problema 1 Sesión 28 (nivel medio)

Resuelve:

$$\int \frac{3x^2-2x+5}{(x+3)^3}dx$$

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 5 – Ejercicio 1)

SESIÓN 29. Integrales de cociente de polinomios con mezcla en el tipo de raíces en el denominador

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 7 – "Cociente de polinomios con mezcla de raíces en el denominador" https://www.youtube.com/watch?v=zQmSQnfNJaA

Problema 1 Sesión 29 (nivel medio)

Resuelve

$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} dx$

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 6 – Ejercicio 1)

SESIÓN 30. Integrales de cociente de polinomios con grado del numerador mayor que el grado del denominador

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 8 – "Cociente de polinomios con grado del numerador mayor que el grado del denominador" https://www.youtube.com/watch?v=Jc7n5tRb52E

Problema 1 Sesión 30 (nivel medio)

Resuelve

$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6} dx$

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 7 – Ejercicio 1)

SESIÓN 31. Un par de ejemplos de integrales por cambio de variable

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 13 – "Integrales con raíces por cambio de variable" https://www.youtube.com/watch?v=9XdevW_XK6o

Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 14 – "Integrales con exponenciales por cambio de variable" https://www.youtube.com/watch?v=Rd22ZcrciH0

Algunas integrales pueden resolverse, de manera más sencilla, aplicando un cambio de variable previo. Sabiendo que ese cambio afecta no solo a la variable x sino también al diferencial o incremento dx.

El objetivo último de los cambios de variable es convertir la integral en la integral de un polinomio o de un cociente de polinomios, que sea fácil de resolver.

$$x = g(t) \rightarrow diferenciar \rightarrow dx = g'(t)dt$$

$$f(x) = f[g(t)]$$

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

No olvidar, al resolver la integral en la nueva variable, deshacer finalmente el cambio de variable inicial.

$$x = g(t) \rightarrow g^{-1}(x) = t$$

Existen multitud de cambios de variable posibles. Si en un ejercicio nos proponen un cambio para resolver la integral, suele ser buena idea usar esa ayuda que dan. Sin olvidar, como ya hemos dicho, que además de aplicar el cambio de variable debemos diferenciar para relacionar el incremento dx con el incremento dt.

Algunos ejemplos de cambio de variables sencillos son:

- Cuando tenemos raíces del mismo radicando, podemos probar con el cambio:

$$radicando = t^n$$

$$Siendo\ n\ el\ m.c.m.\ de\ los\ índices\ de\ las\ raíces$$

- En integrales con exponenciales de la misma base, podemos aplicar:

$$a^x = t \rightarrow a^x \ln(a)\, dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{a^x \ln(a)} \rightarrow dx = \frac{dt}{t \cdot \ln(a)}$$

Problema 1 Sesión 31 (nivel medio)

Resuelve $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 1)

Problema 2 Sesión 31 (nivel medio)

Sea la función $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva que pase por el punto (1,1).

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 8 – Ejercicio 5)

SESIÓN 32. Método por partes en integrales

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 16 – "Método por partes en integrales" https://www.youtube.com/watch?v=-P9p-WPpNFM

En integrales donde detectamos un producto de funciones muy distintas entre sí, suele ser recomendable el método por partes. Una "parte" de la integral se identifica con una función $u(x)$ mientras que otra "parte" de la integral se identifica con $v'(x)$. Y se razona así:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$Donde\ u(x)\ es\ \text{la parte "más difícil de integrar" de las dos,}\ siendo\ u'(x)\ su\ derivada$$

$$Donde\ v'(x)\ es\ la\ otra\ parte, siendo\ v(x)\ el\ resultado\ de\ su\ integral$$

Ejemplo:

$$\int \ln(x)\cdot x\,dx$$

$$u(x)=\ln(x)\to u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=x\to v(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$\int \ln(x)\cdot x\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \to \int \ln(x)\cdot x\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}dx \to \int \ln(x)\cdot x\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Si tras resolver una integral, aparece un logaritmo en la solución, es costumbre aplicar valor absoluto al argumento del logaritmo para garantizar que el argumento no sea negativo (recuerda que solo existe el logaritmo de números positivos). Por eso, en el ejemplo anterior, es común escribir la solución de la forma:

$$\int \ln(x)\cdot x\,dx = \ln|x|\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

En integrales donde, aparentemente, no aparece ningún producto de funciones puede ser buena idea razonar como en el siguiente ejemplo:

$$\int \ln(x)\,dx \to \int \ln(x)\cdot 1\cdot dx$$

$$u(x)=\ln(x)\to u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=1\to v(x)=x$$

$$\int \ln(x)\cdot 1\cdot\ dx = \ln(x)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx \to \int \ln(x)\cdot x\,dx = \ln(x)\cdot x - \int 1\cdot dx \to \int \ln(x)\cdot x\,dx = \ln|x|\cdot x - x + C$$

Problema 1 Sesión 32 (nivel medio)

Resuelve:

$$\int x\cdot e^x\,dx$$

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 9 – Ejercicio 3)

Problema 2 Sesión 32 (nivel avanzado)

Obtener la primitiva de $f'(x)=\ln(x^2+1)$ que pase por el origen de coordenadas.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 9 – Ejercicio 4)

SESIÓN 33. Integral definida, regla de Barrow y cálculo de áreas

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 20 – "Introducción al cálculo de áreas y a la integral definida" https://www.youtube.com/watch?v=iy18I7lwbow

Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 21 – "Propiedades de la integral definida"

https://www.youtube.com/watch?v=7Dd0HGijEfw

Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 22 – "Cálculo de áreas mediante la regla de Barrow"

https://www.youtube.com/watch?v=xBQlm27lOb0

Regla de Barrow para integrales definidas:

- Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.
- Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.
- Se cumple que $\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

El resultado de una integral definida es un número real (positivo, negativo o nulo). Si intercambiamos los límites de integración, el resultado de la integral definida cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

La integral definida es un operador matemático que nos permite calcular el área encerrada por la gráfica de una función con el eje horizontal:

- Si $f(x) \geq 0$ y es continua en $[a,b]$: $Área = \int_a^b f(x)\,dx$
- Si $f(x) \leq 0$ y es continua en $[a,b]$: $Área = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$
- Si $f(x)$ atraviesa al eje horizontal y es continua en $[a,b]$, deberemos calcular los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y aplicar, en cada intervalo, los dos razonamientos anteriores cuando la función está por encima o por debajo del eje OX.

La gráfica de dos funciones puede encerrar un área en un intervalo cerrado $[a,b]$, que se puede calcular determinando, en primer lugar, que gráfica está por encima de la otra. Si, por ejemplo, se cumple que $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo $[a,b]$:

$$Área = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Si aparecen tramos donde las funciones pasan de estar por encima a estar por debajo una de otra, se calculan primero los puntos de corte entre ambas funciones igualando sus expresiones $f(x) = g(x)$. Comparamos las imágenes de las dos funciones en cada intervalo para determinar cuál de las dos se encuentra por encima de la otra. Y en cada intervalo aplicamos el razonamiento anterior para el cálculo del área encerrada por ambas funciones.

Problema 1 Sesión 33 (nivel medio)

Obtener el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 3x$ con el eje horizontal en el intervalo [0, 4].

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11a – Ejercicios 1)

Problema 2 Sesión 33 (nivel avanzado)

Obtener el área encerrada entre la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11a – Ejercicios 2)

SESIÓN 34. Continuación al cálculo de áreas mediante integrales

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 23 – "Ejemplos sencillos de cálculos de áreas" https://www.youtube.com/watch?v=e9n8jKy0Tb8

Problema 1 Sesión 34 (nivel medio)

Calcula el área encerrada por la función $f(x) = x^3 - 4x$ y la recta $y = -x - 2$.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11a – Ejercicios 8)

Problema 2 Sesión 34 (nivel medio)

2.17. Calcula el área encerrada por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ y la recta $r: 2x + y - 7 = 0$ con el semieje positivo de abscisas.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11a – Ejercicios 9)

SESIÓN 35. Continuación al cálculo de áreas mediante integrales

VIDEO DEL CANAL RECOMENDADO: Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 24 – "Área encerrada por dos o más funciones – parte I" https://www.youtube.com/watch?v=nJ4JXCDALUA

Matemáticas 2ºBach – Integrales – Capítulo 25 – "Área encerrada por dos o más funciones – parte II" https://www.youtube.com/watch?v=R5yxMN0Vntw

---

Problema 1 Sesión 35 (nivel medio)

Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = -x^2 + 5$. Calcula el área.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 1)

Problema 2 Sesión 35 (nivel avanzado)

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{5x}{2} & x \leq -2 \\ x^2 + 1 & -2 < x < 2 \\ 10 - \frac{5x}{2} & x \geq 2 \end{cases}$$

y represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas. Calcular el área de esa región.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 2)

SESIÓN 36. Más sobre cálculo de áreas

Problema 1 Sesión 36 (nivel avanzado)

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+3 & si \quad x<4\\ 2x-5 & si \quad x\geq 4\end{cases}$$

y represente la región del plano limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas. Calcule el área de esa región.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 3)

Problema 2 Sesión 36 (nivel medio)

La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decímetros cuadrados, coincide con el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+6x$ y $g(x)=\frac{x^2}{5}$.

Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones y calcule su área.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 4)

SESIÓN 37. Y seguimos con integrales y cálculo de áreas

Problema 1 Sesión 37 (nivel avanzado)

Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2 & si \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 \ si \ -1 \leq x \leq 3$$

Represente el reciento limitado por las gráficas de ambas funciones. Calcule el área de esa región.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 5)

Problema 2 Sesión 37 (nivel avanzado)

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & si \ x < 2 \\ x^2 - 2x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Represente el recinto limitado por las rectas $y = 2x$, $x = -1$, $x = 1$ y la gráfica de la función. Calcule el área del recinto.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 6)

SESIÓN 38. Y vamos que nos vamos con las integrales y los cálculos de área

---

Problema 1 Sesión 38 (nivel avanzado)

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3+e^x & si\ \ x<1 \\ x^2+ax+2 & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

Para $a=-3$, represente la región limitada por la gráfica de la función, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje de abscisas. Calcule el área de la región.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 7)

Problema 2 Sesión 38 (nivel avanzado)

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-1 & si\ \ x\leq 1 \\ \dfrac{b}{x} & si\ \ 1<x\leq 3 \\ \dfrac{x-a}{3} & si\ \ x>3 \end{cases}$$

Con a y b números reales.

Para $a=5$ y $b=2$, represente el recinto limitado por la gráfica de la función, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje OX. Calcule el área del recinto.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 8)

SESIÓN 39. Y terminamos con las integrales

Problema 1 Sesión 39 (nivel avanzado)

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función $v(t)$ nos indica, el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es:

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6, \ \ t\epsilon[0,6]$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v, y las abscisas de los extremos relativos.

b) Si en el momento de apertura del mercado el valor de la acción es de 10 euros, calcula la función $v(t)$.

c) Si un inversor compró 3.000 acciones en un instante t=2 y las vendió en un instante t=4, indica la ganancia o pérdida total del inversor.

d) ¿En qué momentos se debe realizar la compra y la venta de acciones para obtener el beneficio máximo? Justifique su respuesta.

(solución: 2º Bach CCSS – Tema 2 – Apartado 11b – Ejercicios 9)