

Problemas – Tema 2

Enunciados de problemas sobre trigonometría

■ Hoja 1

1. Siendo α y β dos ángulos del primer cuadrante que cumplen:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{5}{13}$$

Calcular las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\operatorname{cos}(\alpha - \beta)$ c) $\operatorname{tg}(2\alpha)$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)$ e) $\tan(\alpha)$

solución: a) $\frac{63}{65}$ b) $\frac{56}{65}$ c) $\frac{24}{7}$ d) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ e) $\frac{3}{4}$

2. Calcula a partir de los valores de las razones trigonométricas de los ángulos 30° , 45° y 60° :

a) $\operatorname{sen} 15^\circ$

b) $\operatorname{cos} 75^\circ$

c) $\operatorname{tg} 120^\circ$

3. Comprueba las siguientes igualdades:

a) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \operatorname{cos}(2x)} = \tan x$

b) $\operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

c) $\tan(3x) = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

4. Sabiendo que $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$, calcula el valor de $\operatorname{sen}(3x)$ y de $\operatorname{sen}(4x)$.

solución: $1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Hoja 2

1. Comprueba las siguientes igualdades:

$$a) \frac{\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y)}{\cos(x) + \cos(y)} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$b) \frac{\cos(x) + \cos(y)}{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)} = \frac{1}{\cos(y) - \cos(x)}$$

$$c) \tan(A) + \tan(B) = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos(A)\cos(B)}$$

$$d) 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2A) = \frac{\operatorname{sen}^3 A + \cos^3 A}{\operatorname{sen} A + \cos A}$$

2. Resuelve:

$$a) \cos(2x) + \operatorname{sen}(x) = 1$$

$$b) \tan(2x) = \operatorname{cotan}(x)$$

$$c) \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) = 0$$

$$d) \cos x - \operatorname{sen}(2x) = 0$$

$$e) \cos x - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

solución:

$$a) 0^\circ + 180^\circ k, 30^\circ + 360^\circ k, 150^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$b) 30^\circ + 180^\circ k, 150^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$c) 0^\circ + 180^\circ k, 60^\circ + 360^\circ k, 300^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 30^\circ + 360^\circ k, 90^\circ + 180^\circ k, 150^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$e) 0^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Comprueba:

$$a) \cos^2 x + \cos^2 y = 1 - \cos(x+y)\cos(x-y)$$

b) $\tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$ siendo A, B y C los tres ángulos de un triángulo

4. Llamando a $\operatorname{tg}(x) = t$, deduce una fórmula para expresar $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ en función de t .

solución: $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

Hoja 3

1. Resuelve:

a) $2 \cos x + 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 1$

b) $\ln(\operatorname{sen} x) + \ln(\cos x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $\operatorname{sen}(2x) \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$

d) $\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{sec}(x) = \sqrt{2}$

solución:

a) $30^\circ + 360^\circ k, 60^\circ + 360^\circ k, 150^\circ + 360^\circ k, 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

b) $45^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

c) $0^\circ + 180^\circ k, 30^\circ + 180^\circ k, 150^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

d) $45^\circ + 360^\circ k, 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

2. Comprueba

a) $\frac{\tan(A) \cotan(B) + 1}{\tan(A) \cotan(B) - 1} = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen}(A-B)}$

b) $\frac{\cotan A + \tan A}{\cotan A - \tan A} = \operatorname{sec}(2A)$

c) $\frac{\operatorname{sen}(3A) + \operatorname{sen} A}{\cos(3A) - \cos A} = -\cotan A$

d) $\frac{\cos(5A) + \cos(3A)}{\operatorname{sen}(5A) - \operatorname{sen}(3A)} = \cotan A$

3. Demuestra que si $A + B + C = 90^\circ$, se cumple la relación:

$$\tan A \tan B + \tan A \tan C + \tan B \tan C = 1$$

4. Resuelve:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Hoja 4

1. Demuestra:

a) $\frac{\tan A + \tan B}{\cotan A + \cotan B} = \tan A \tan B$

b) $\tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2 \tan(2A)$

c) $\sen(45^\circ + x) - \sen(45^\circ - x) = \sqrt{2} \sen x$

2. Resuelve:

a) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\tan(x) - 2}{\tan(x) + 2}$

b) $4 \sen(x - 30^\circ) \cos(x - 30^\circ) = \sqrt{3}$

c) $\cos(8x) + \cos(6x) = 2 \cdot \cos 210^\circ \cdot \cos x$

solución:

a) $90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

b) $60^\circ + 180^\circ k, 90^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

c)

3. Resuelve

$$\begin{cases} \sen x + \sen y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \sen x - \sen y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

solución:

$x = 60^\circ + 360^\circ k, 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$y = 30^\circ + 360^\circ k, 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

4. Sabiendo que $\sen(x) = \frac{2}{3}$, siendo x un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $\sen(2x)$

b) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $\tan(2x)$

solución: a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}$

c) $4\sqrt{5}$

Hoja 5

1. Calcula:

a) $\cos(\arcsen(\frac{1}{5}))$

b) $\tan(\arccos(\frac{3}{4}))$

c) $\sen(2 \arcsen(\frac{1}{3}))$

solución: a) $\cos x = \frac{\pm\sqrt{24}}{5}$ b) $\tan x = \frac{\pm\sqrt{7}}{3}$ c) $\sen x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

2. Obtén el ángulo x que cumpla $4 \cdot \sen(x) = \sen(2x)$

solución: $0^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

3. Un terreno triangular tiene 50m de longitud en uno de sus lados. Los otros dos lados forman con el de 50m, ángulos de 40° y 30° . Calcula las longitudes de los lados.

solución: 50m, 34,4m, 26,8m

4. Dos carreteras parten de un mismo punto, y forman entre si un ángulo de 60° . Desde el punto de intersección parten, simultáneamente por cada una, dos coches. El primero con una velocidad constante de 50km/h y el segundo con una velocidad constante de 70km/h. Calcula la distancia que existirá entre ambos coches al cabo de 10 minutos.

solución:

5. En un triángulo el lado a es igual a 12m, y el lado b es igual a 7m. El ángulo C mide 40° . Halla los ángulos A y B .

solución: $A = 105,89^\circ, B = 34,178^\circ$

6. De un triángulo conocemos:

$a = 8\text{cm}$

$b = 7\text{cm}$

$C = 30^\circ$

Calcula el lado c , el área del triángulo, el radio de la circunferencia circunscrita y el radio de la circunferencia inscrita.

solución: $c = 4\text{cm}, \text{área} = 14\text{cm}^2, R = 4\text{cm}, r = 1,47\text{cm}$

Hoja 6

1. De un triángulo sabemos:

$$a = 8\text{cm}$$

$$b = 7\text{cm}$$

$$c = 4\text{cm}$$

Halla el ángulo A (opuesto al lado a) utilizando la fórmula de Brigg.

solución:

2. De un triángulo conocemos:

$$a = 10\text{cm}$$

$$B = 60^\circ$$

$$C = 50^\circ$$

Obtener los valores de los lados b, c y del ángulo A.

solución: $b = 9,25\text{cm}$, $c = 8,19\text{cm}$, $A = 70^\circ$

3. De un triángulo conocemos:

$$b = 3\text{cm}$$

$$c = 2\text{cm}$$

$$A = 60^\circ$$

Obtener el lado a y los ángulos B, C.

solución: $a = 2,64\text{cm}$,

4. Los puntos A y B están separados por un barranco. Se recurre a un punto C y se mide:

$$d(\text{AC}) = 48\text{m}$$

$$d(\text{BC}) = 67\text{m}$$

El ángulo que forman estos dos lados es de 80° . Calcular la distancia $d(\text{AB})$.

solución: $75,49\text{m}$

5. Resuelve:

a) $\sec^2 x - \tan x = 1$

b) $4 \sen^2 x + 2 \cos x = 4$

solución:

a) $0^\circ + 180^\circ k$, $45^\circ + 180^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $90^\circ + 180^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$

Hoja 7

1. Para fijar una antena en lo alto del tejado a dos aguas de una casa, se recurre a dos tirantes que unen el extremo superior de la antena con los puntos finales de la vertiente del tejado. Sabiendo que la antena mide 3m, las dos vertientes 11m cada una y el ángulo que forman las vertientes entre sí 100° , calcula cuánto medirá cada tirante.

solución: 13,12m

2. Un barco que navega hacia el norte, enfilea dos faros en dirección este. Tras una hora de marcha uno de los faros aparece al sudeste y el otro al sudsudeste. Halla la velocidad del barco sabiendo que la distancia entre los faros es de 8km.

Solución: 13,56 km/h

3. En el triángulo ABC conocemos:

$$a = 4\text{m}$$

$$b = 6\text{m}$$

$$c = 5\text{m}$$

Deduce razonadamente, y sin calculadora, las razones trigonométricas del ángulo $2B$.

$$\text{solución: } \sin(2B) = \frac{\sqrt{63}}{32} \quad \cos(2B) = -31/32 \quad \tan(2B) = \frac{-\sqrt{63}}{31}$$

4. En un triángulo isósceles ABC, con el ángulo $B = C$, la base es de 80cm y el radio de la circunferencia inscrita 24cm. Halla la altura sobre el lado desigual y el perímetro del triángulo.

5. Comprueba:

$$\frac{\sin(a)(\cos b + \sin a) + \cos(a)(\sin b + \cos a) - 1}{\cos(b)(\cos a + \cos b) + \sin(b)(\sin b - \sin a) - 1} = \tan(a+b)$$

6. Resuelve:

a) $\sin(4x) + \sin(3x) + \sin(2x) = 0$

b)
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \\ \cos x - \cos^2 y = 0 \end{cases}$$

c) $\cos y = -\sqrt{\cos x}$

solución:

a) $0^\circ + 360^\circ k, 120^\circ + 360^\circ k, 240^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $x = 36^\circ + 180^\circ k, y = 25^\circ 54' 49'' + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x = 144^\circ + 180^\circ k, y = 154^\circ 5' 10'' + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $154^\circ 5' 10'' + 360^\circ k, 205^\circ 54' 49'' + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Hoja 8

1. La relación entre los lados de un triángulo es:

$$a = (3/2) b$$

$$a = (5/4) c$$

Calcula $\cos(A/2)$, siendo A el vértice del triángulo opuesto al lado a.

solución: 0,73

2. Deducir la fórmula de $\tan(2x)$ en función del $\sin(x)$ y aplícala en el caso particular de $\sin(x) = 2/3$.

solución:
$$\sqrt{\frac{4\sin^2 x - 4\sin^4 - 1}{1 + 4\sin^4}}$$

3. Sabiendo que:

$$\cotan(x) - \tan(x) = \sqrt{12}$$

Calcula las razones trigonométricas del ángulo $2x$ sin usar calculadora.

solución:

4. Demuestra que en todo triángulo se cumple $\sin(B) = -\sin(A + 2B + C)$

5. Demuestra:

a)
$$\frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \tan x$$

b)
$$\frac{\sin a + \sin(3a)}{\cos a - \cos(3a)} = \cotan a$$

6. Resuelve:

a)
$$\cos(2x) = 5 - 6 \cos^2 x$$

b)
$$2 \cos(x) + 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 3$$

c)
$$2 \sin(x) + \cos^2 x = \frac{7}{4}$$

solución:

a) $30^\circ + 180^\circ k, 150^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

b) $60^\circ + 360^\circ k, 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

c) $30^\circ + 360^\circ k, 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

Hoja 9

1. Demuestra que en todo triángulo se cumple:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

2. Las longitudes de los lados de un cuadrilátero son 7cm, 8cm, 9cm y 10cm respectivamente. El ángulo A que forman los lados de longitud 8cm y 9cm es de 68°. Calcula las longitudes de las diagonales del cuadrilátero.

solución: diagonal(AC) = 13,788 cm diagonal(BD) = 9,542 cm

3. Demostrar que si en un triángulo se cumple:

$$\frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C} = \operatorname{sen} A$$

Entonces el triángulo es rectángulo.

4. Demostrar que en todo triángulo rectángulo se cumple $\cos(A) + \cos(C) = \operatorname{sen}(B)$

5. Un trapecio rectángulo tiene la base mayor de 10cm, la base menor de 6cm, y el lado oblicuo forma con la base mayor un ángulo de 30°. Calcula el perímetro y el área del trapecio.

solución: $P = \frac{48 + 12 \cdot \sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ $A = \frac{32 \cdot \sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$

6. Resuelve:

a) $4 \operatorname{sen}(x) + 4 \cos^2 x = 5$

b) $\tan(2x + 45^\circ) = -1$

c) $\cos(3x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{sen} x = \cos x$

solución:

a) $30^\circ + 360^\circ k, 150^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $45^\circ + 180^\circ k, 135^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $20^\circ + 120^\circ k, 120^\circ + 120^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $45^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Hoja 10

1. Sabiendo que $\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{-7}{4}$ y que α es un ángulo del cuarto cuadrante, deduce los siguientes apartados sin utilizar la calculadora. Si es necesario deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales):

a) $\sec(\alpha)$

b) $\operatorname{tg}(2\alpha)$

2. Demuestra $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) = \sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x)$

3. Siendo α y β dos ángulos del tercer cuadrante que cumplen $\operatorname{sen} \alpha = \frac{-2}{5}$, $\operatorname{cos} \beta = \frac{-1}{3}$, calcula las siguientes expresiones trigonométricas sin usar la calculadora. Si es necesario, deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales).

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

b) $\operatorname{cos}(\alpha - \beta)$

4. Una persona en la calle ve el último piso de un edificio bajo un ángulo de 30° . Si avanza 10 metros hacia el edificio, ve el último piso bajo un ángulo de 45° . ¿Cuál es la altura del edificio? Si es necesario, deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales).

5. Sabiendo que $\sec(\alpha) = -2$ y que α es un ángulo del tercer cuadrante, deduce los siguientes apartados sin utilizar la calculadora. Si es necesario deja el resultado final como una única fracción simplificada (no usar números decimales):

a) $\operatorname{tag}(\alpha)$

b) $\operatorname{cos}(2\alpha)$

6. Demuestra la siguiente igualdad $\frac{\operatorname{sen}(x+x)}{\operatorname{cos}(x+x)-1} = -\operatorname{cotg} x$

7. En un triángulo el lado a es igual a 12m, y el lado b es igual a 7m. El ángulo C mide 40° . Halla el lado c (opuesto al ángulo C) y los ángulos A (opuesto al lado a) y B (opuesto al lado b).

8. Resuelve $\operatorname{sen}(x) = \frac{\operatorname{cos}(x)}{2}$

Hoja 11

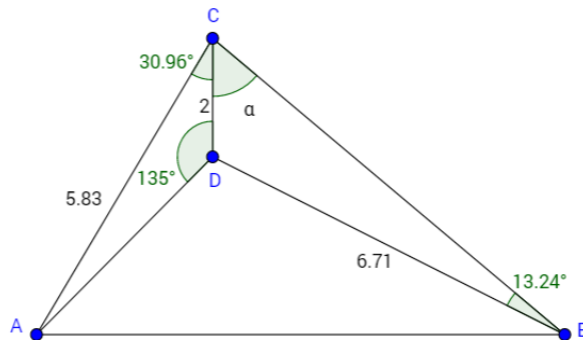
1. Demuestra la siguiente igualdad $\cotg^2(x) - \cos^2(x) = \cotg^2(x) \cdot \cos^2(x)$.

2. Resuelve $4 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + 2 \cdot \cos(x) = 4$.

3. Sabiendo que $\cos(\alpha) = \frac{-1}{3}$ y $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{3}$ obtener:

- α
- $\cos(2\alpha)$ (No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria)
- $\operatorname{tg}(2\alpha)$ (No usar la calculadora. Dejar resultado en forma fraccionaria)

4. Obtener la distancia \overline{AB} en la siguiente figura sabiendo que $\alpha < 90^\circ$.



5. Resuelve $\operatorname{sen}(x) + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x$.

6. Resuelve de manera razonada. No utilizar calculadora y dejar el resultado final en forma fraccionaria.

a) Obtener $\cos(135^\circ)$ utilizando el dato $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Obtener $\cos(120^\circ)$ utilizando el dato $\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

c) Obtener $\cos(210^\circ)$ utilizando el dato $\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

Hoja 12

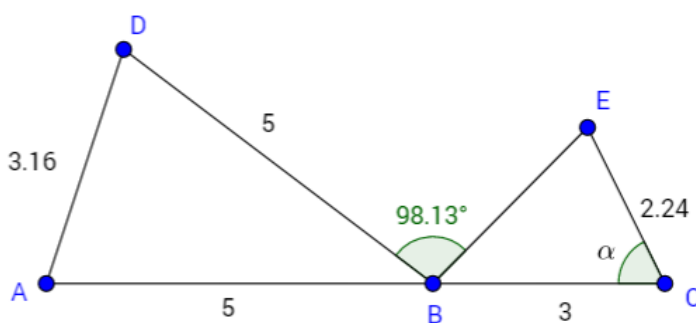
1. Demuestra la siguiente igualdad $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 y$.

2. Resuelve $\cos x-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)=1$

3. Sabiendo que $\operatorname{sen}(x)=\frac{2}{3}$, siendo x un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $\operatorname{sen}(2x)$ b) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ c) $\operatorname{tg}(2x)$

4. Obtener el ángulo α de la figura sabiendo que el vértice $\hat{E} < 90^\circ$.



5. Resuelve $\operatorname{tg}(2x)=\operatorname{cotg}(x)$

6. Sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{5}{13}$ y que α es un ángulo del segundo cuadrante, deduce:

a) $\cos(\alpha)$ b) $\operatorname{cotg}(\alpha)$ c) $\operatorname{cosec}(\alpha)$

Hoja 13

1. Transformar los ángulos 15° , 30° , 45° , 60° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° y 360° en radianes.

2. Resuelve
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \sqrt{2} \end{array} \right\}$$

3. Calcula el área de un pentágono regular de 2 cm de lado.

4. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento, situada a 8 metros del suelo, y observa el edificio de enfrente de modo que ve la parte superior de este con un ángulo de elevación de 35° , y observa la parte inferior con un ángulo de depresión de 43° . Determina la altura del edificio que tiene enfrente.

5. ¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj cuando marcan las cuatro y diez? Ayuda: durante el transcurso de la hora que transcurre de 4 a 5, la aguja de la hora no permanece fija apuntando al número 4, sino que avanza también de manera proporcional al avance del minutero.

6. Halla la longitud del radio de la circunferencia inscrita en un pentágono regular de 4 cm de lado.

7. La escalera de un tobogán y la rampa forman con el suelo ángulos de 60° y 15° grados respectivamente. La distancia entre el pie de la escalera y el de la rampa es de $\sqrt{45} \text{ m}$. Calcula la longitud de la escalera, la longitud de la rampa y determina el punto más alto del tobogán.

8. Las ramas de un compás miden $\sqrt{2} \text{ dm}$ y $\sqrt{3}-1 \text{ dm}$. Se abre el compás de manera que las ramas forman un ángulo de 135° y se traza una circunferencia en un papel. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que se ha dibujado? ¿Qué ángulo forma cada rama del compás con la superficie del papel?

9. Dos fuerzas de 45 N y 50 N actúan sobre un mismo punto y dan como resultante una fuerza de 60 N. ¿Qué ángulo forman dichas fuerzas? Ayuda: Trata las fuerzas como vectores.