Problemas – Tema 7

Enunciados de problemas ampliación Temas 5 y 6

Hoja 1

1. Dado el segmento de extremos $A(-7,3)$ y $B(5,11)$, halla la ecuación de su mediatriz.

2. Halla la distancia del punto $P(1,0)$ a la recta $r: \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$.

3. Halla el punto simétrico de $A(1,1)$ respecto de la recta $r: x-3y-12=0$.

4. Dado el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(10,2)$ y $C(6,8)$:

a) Halla las coordenadas de su ortocentro (punto de corte de las alturas).

b) Halla las coordenadas del circuncentro (punto de corte de las mediatrices).

5. Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta $r: 3x-4y+10=0$.

6. Sea el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,3)$ y $C(1,8)$. Hallar su área utilizando teoría de vectores y rectas (no usar teorema del seno ni teorema de coseno de trigonometría).

7. Dada la recta $r: x-2y=0$ y los puntos $A(0,3)$ y $B(-1,5)$. Halla los extremos del segmento simétrico al $\vec{AB}$ respecto de la recta.

8. Calcula la distancia entre las rectas $r: 3x-4y+5=0$ y $s: 3x-4y-15=0$.

Hoja 2

1. Escribe la ecuación de las rectas que pasando por el punto $P(2,-7)$ sea:

a) paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

b) perpendicular a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

2. Obtener el ángulo que forman las rectas $r:\sqrt{3}x+y-5=0$ y $s:3x-\sqrt{3}y+1=0$.

3. Escribe la ecuación general de una recta que pase por el punto $P(3,1)$ y forme con la recta $r:x-2y+7=0$ un ángulo de 45º.

4. Halla la ecuación general de una recta que pase por el origen de coordenadas y forme un ángulo de 60º con la recta $r:\sqrt{3}x-3y+1=0$.

5. Las rectas $r:3x+2y-1=0$ y $s:x+k\cdot y-2=0$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes. Obtener el valor de k .

6. Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos $A(3,5)$ y $C(2,1)$. Y el vértice B se encuentra en el eje de abscisas. Obtener las coordenadas de B y D .

7. Un punto es equidistante a los puntos $A(6,2)$ y $B(-4,8)$. Su distancia al eje OX es el doble de la distancia al eje OY. Determinar ese punto.

8. La recta r corta a los ejes OX y OY en los puntos P y Q respectivamente, cumpliéndose que $|\vec{OP}|=3\cdot|\vec{OQ}|$. Halla la ecuación de r sabiendo que pasa por el punto $(2,5)$.

Hoja 3

1. Los puntos $P(2,3)$ y $Q(-4,1)$ son simétricos respecto cierta recta r . Obtener la ecuación general de esa recta.

2. Sea $r: x-3y+6=0$. Escribe la ecuación de su recta simétrica respecto:

a) al eje OX.

b) al eje OY.

3. La recta r pasa por el punto $P(4,7)$ y forma un ángulo de 45º con $t: 3x-y+11=0$. La recta s pasa por el punto $Q(1,3)$ y forma un ángulo de 90º con $v: 2x-y+7=0$.

Escribe las ecuaciones generales de r y s . Halla el punto de intersección de ambas rectas.

4. Halla las ecuaciones de las dos rectas que, pasando por $P(2,3)$, forman un ángulo de 45º con la recta de ecuación $r: x+2y-5=0$.

5. Sean los puntos $A(1,3)$ y $B(3,2)$. Sabemos que el triángulo ABC es isósceles y rectángulo en B. Halla las coordenadas del vértice C.

6. Sean las rectas $r: 3x+4y+10=0$ y $s: 3x+4y-10=0$.

a) Escribe sus ecuaciones normales.

b) Calcula la distancia de cada una respecto al origen.

c) Calcula la distancia entre ambas rectas.

7. Sean las rectas $r: 3x+4y-12=0$ y $s: 5x+12y-60=0$. Escribe las ecuaciones de las dos bisectrices.

8. Halla la distancia entre las rectas $r: x+y-3=0$ y $s: x+y+7=0$.

Hoja 4

1. Escribe las ecuaciones de las posibles rectas que, siendo paralelas a $r: x-2y-3=0$, disten 5 unidades del origen de coordenadas.

2. Un triángulo tiene sus lados sobre las rectas $r: x=0$, $s: y=0$ y $t: 3x+4y-12=0$. Obtener:

a) Ortocentro (punto de intersección de las alturas).

b) Circuncentro (punto de intersección de las mediatrices).

c) Baricentro (punto de intersección de las medianas).

d) Incentro (punto de intersección de las bisectrices).

3. Obtener ecuación de la recta que, formando un ángulo de 30º con el semieje positivo OX, diste 6 unidades del origen de coordenadas.

4. Obtener la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por el punto $A(3,0)$ y por el pie de la perpendicular, trazado desde A , a la recta $r: x-2y+6=0$.

5. Obtener la ecuación de la recta simétrica a $r: x-3y+5=0$ respecto del eje de simetría formado por la recta $s: 2x+y-4=0$.

6. Dos vértices opuestos de un cuadrado son $A(1,1)$ y $C(5,3)$. Obtener las coordenadas de los otros dos vértices y el área del cuadrado.

7. Dados los puntos $P(0,-1)$ y $Q(1,2)$, determina las coordenadas de un punto A que pertenezca a la recta $r: x+y-2=0$ y cumpla que el vector $\vec{AP}$ sea perpendicular a $\vec{AQ}$.

8. Dada la recta $r: 3x-5y+25=0$ y los puntos $P(3,4)$ y $Q(7,8)$, hallar el punto A que pertenezca a la recta y verifique que el vector $\vec{PA}$ es igual a $\vec{AQ}$.

Hoja 5

1. Halla el eje de simetría que transforma la recta $r: x+2y-2=0$ en la recta $s: x-2y-2=0$.

2. Dada las rectas $r: 3x+2y-5=0$ y $s: 3x-2y+1=0$, obtener el punto P que equidista de ambas y que pertenezca a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

3. Escribe la ecuación de la circunferencia:

a) Con centro $(1,-3)$ y radio $\sqrt{3}$ unidades.

b) Con centro $(1,1)$ y pasa por el punto $A(5,4)$.

c) Con diámetro el segmento de extremos $A(3,2)$ y $B(7,-4)$.

4. Escribe la ecuación de la circunferencia:

a) Que pasa por $A(2,0)$ y $B(0,8)$ y con centro en la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

b) Concéntrica a la circunferencia de ecuación $(x+3)^2+(y-5)^2=16$ y con radio 8 unidades.

c) Con centro en la intersección de las rectas $r: 2x+y-7=0$ y $s: 4x-y-11=0$, y radio igual a la distancia del origen de coordenadas a la recta $t: 5x+12y-26=0$.

5. Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,0)$, $B(8,0)$ y $C(0,4)$.

6. Halla los valores de a y b para que la ecuación $3x^2+ay^2+2bxy-12x+3y+4=0$ represente una circunferencia. Calcula coordenadas del centro y su radio.

7. Hallar las ecuaciones de las posibles circunferencias que siendo tangentes a los ejes OX y OY, pasan por el punto $P(1,2)$.

8. Halla la ecuación de la circunferencia en la que los puntos $A(1,6)$ y $B(3,-2)$ son diametralmente opuestos.

Hoja 6

1. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-2)$, $B(2,3)$ y $C(-2,2)$.

2. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(2,-1)$ y es tangente a la recta $r: 3\mathrm{x}-4\mathrm{y}+5=0$. Determina también el puntode tangencia.

3. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(3,1)$ y $B(7,3)$ y tiene por radio $\sqrt{10}$ unidades.

4. Sea la recta $r: x+2y-a=0$ y la circunferencia $x^2+y^2=9$. Calcula el parámetro a para que:

a) La recta y la circunferencia sean secantes.

b) La recta y la circunferencia sean tangentes.

c) La recta y la circunferencia sean exteriores.

5. Halla el lugar geométrico de los puntos el plano que están a igual distancia de $A(0,1)$ y $B(-2,3)$, y que además equidisten de las rectas $r: x-2y+5=0$ y $s: 2\mathrm{x}+y+4=0$.

6. Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en $(1,0)$ y radio 5 unidades. Halla la potencia del punto $Q(8,0)$ y del punto $T(3,4)$ respecto de dicha circunferencia.

7. Sea la circunferencia $x^2+y^2=25$. Escribe la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto con abscisa 2 y ordenada positiva.

8. Sea la circunferencia $x^2+y^2=9$ y el punto $P(a,0)$. Estudia la posición relativa del punto respecto la circunferencia según el valor de a .

Hoja 7

1. Sea la circunferencia de centro $(1,-3)$ y tangente a la recta $r: x-y-10=0$. Y sea una segunda circunferencia concéntrica a $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ y de radio 6 unidades. Halla el eje radical de las dos circunferencias.

2. Sea la circunferencia de centro $(3,1)$ y radio 4 unidades. Una segunda circunferencia de centro $(4,5)$ es tangente al eje de ordenadas. Y una tercera circunferencia pasa por el origen de coordenadas y tiene su centro en $(-3,-4)$. Hallar el centro radical de las tres circunferencias.

3. Sea la circunferencia $x^2+y^2=4$ y un punto exterior a ella $P(6,0)$. Obtener la ecuación general de las dos rectas tangentes a la circunferencia y que pasan por el punto.

4. Obtener la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=1$ y que pasan por el punto $(0,3)$.

5. Representa gráficamente las circunferencias $x^2+y^2-4x-6y-23=0$ y $x^2+y^2-4x-6y-3=0$. Obtener la ecuación de su eje radical.

6. Halla el eje radical de la circunferencia que tiene centro en $(2,3)$ y radio $r=2$, y de la circunferencia que tiene centro en $(2,-5)$ y radio $r=6$.

7. Sea la circunferencia $x^2+y^2=1$ y el punto $P(a+1,2a)$. Estudia la posición relativa del punto respecto la circunferencia según el valor de a .

8. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(6,-2)$ y $B(11,10)$ sea 26 .

Hoja 8

1. Respecto unos ejes cartesianos rectangulares, los postes de una portería de fútbol son los puntos $A(1,0)$ y $B(-1,0)$. ¿Desde qué puntos del campo se ve la portería bajo un ángulo de 90º?

2. Calcula la ecuación de la elipse con centro el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que :

a) Su distancia focal es 16 y su excentricidad $\frac{4}{5}$.

b) Su semieje mayor es 9 y pasa por el punto $(6,4)$.

c) Pasa por el punto $(1,3)$ y su excentricidad es $\frac{1}{2}$.

d) Pasa por $(\frac{1}{2},\sqrt{3})$ y por $(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$.

e) El eje menor mide 10 y pasa por $(8,3)$.

3. Obtener los vértices, focos, distancia focal, longitud del semieje mayor y longitud del semieje menor de la elipse $64x^2+36y^2+128x+72y-2204=0$. Represéntala gráficamente.

4. Obtener los vértices, focos, distancia focal, longitud del semieje mayor y longitud del semieje menor de la elipse $x^2+5y^2-6x+20y+8=0$. Represéntala gráficamente.

5. Obtener los vértices, focos, distancia focal, longitud del semieje mayor y longitud del semieje menor de la elipse $16x^2+9y^2+128x-90y+337=0$. Represéntala gráficamente.

6. Escribe la ecuación de la elipse de centro el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre el eje de abscisas, sabiendo que uno de sus focos es $F'(-3,0)$ y que los radio vectores de un punto P perteneciente a la elipse miden respectivamente 2 y 8 .

Hoja 9

1. Halla la ecuación de la elipse centrada en el punto $(-1,3)$ con foco sobre una recta paralela al eje de abscisas, siendo su semieje mayor 8 y la excentricidad $\frac{3}{5}$.

2. Halla la ecuación de la elipse de focos $F(1,1)$ y $F'(-1,1)$, con eje mayor 4 .

3. Sea la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Escribe las ecuaciones de los radio vectores del punto de abscisa 3 y ordenada positiva perteneciente a la elipse.

4. Calcula el valor de k para que la recta $r: x-y+k=0$ sea tangente a la elipse $x^2+2y^2=4$.

5. Halla la ecuación de la elipse de focos $F'(0,0)$ y $F(3,3)$, teniendo por eje mayor 10 unidades.

6. Halla la ecuación de la elipse de focos $F'(-\sqrt{3},-1)$ y $F(\sqrt{3},1)$, teniendo por eje mayor 10 unidades.

7. Obtener la ecuación de la recta tangente trazada desde el punto $P(0,3)$ a la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

8. Halla el área del cuadrilátero formado por los puntos de corte de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ con las bisectrices de los cuatro cuadrantes.

Hoja 10

1. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $(3,0)$ y sus distancia a la recta $r: 3x-25=0$ están en razón $\frac{3}{5}$. ¿Se trata de alguna curva cónica?

2. Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ en el punto de abscisa $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y ordenada positiva.

3. Determina la ecuación de las rectas tangentes a la elipse $2x^2+y^2=8$ trazadas desde el punto $P(-1,5)$.

4. Obtener la ecuación de la elipse de focos sobre una recta paralela al eje de abscisas, centrada en $(-1,3)$, con semieje mejor 8 y excentricidad $\frac{3}{5}$.

5. Demuestra que si $P(x,y)$ es un punto de la elipse, la razón entre las distancias del punto al foco F y del punto a la recta $x=\frac{a}{e}$, es igual a la excentricidad e de la elipse (a es la longitud del semieje mayor).

6. Un objeto móvil se desplaza de modo que su distancia al punto $(4,0)$ es siempre la mitad de su distancia a la recta $x-16=0$. Halla la ecuación de la trayectoria del objeto.

7. Dada la elipse $x^2+2y^2=6$, obtener las coordenadas de un rectángulo inscrito en la elipse, de lados paralelos a los ejes de la elipse y de perímetro 12 unidades.

8. Halla el valor de k para que la elipse $x^2+2y^2=4$ y la recta $x-y+k=0$ sean tangentes.

Hoja 11

1. Obtener las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices reales, la longitud del semieje real, del semieje imaginario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola $16x^2-9y^2+32x+36y-164=0$. Represéntala gráficamente.

2. Obtener las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices reales, la longitud del semieje real, del semieje imaginario, la distancia focal, la excentricidad y las asintotas de la hipérbola $16x^2-9y^2-96x-18y+279=0$. Represéntala gráficamente.

3. Obtener la ecuación de la hipérbola centrada en el origen, focos sobre el eje de abscisas, que pasa por el punto $(8\sqrt{2}, 15)$ y que tenga por excentricidad $\frac{17}{8}$.

4. Obtener la ecuación de la hipérbola centrada en el origen, focos sobre el eje de abscisas, que pasa por el punto $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 1)$ y con asíntota la recta $y=2x$.

5. Obtener la ecuación de la hipérbola centrada en el punto $(4,2)$, con un foco en $(4,5)$ y excentricidad $\frac{3}{2}$.

6. Obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $x^2+y^2-2x+4y-5=0$.

7. Obtener ecuación de la hipérbola de focos $F(0,0)$ y $F'(-2,-2)$, siendo su eje real 4 .

8. Obtener ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ en el punto $(\frac{20}{3},4)$.

Hoja 12

1. Sea un triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(8,-10)$ y $C(4,6)$. Obtener:

a) Circuncentro (punto de intersección de las mediatrices).

b) Ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo, con centro en el circuncentro y radio igual a la distancia del circuncentro a uno de los vértices del triángulo.

2. Sea la recta $r: x+2y-a=0$ y la circunferencia $x^2+y^2=9$. Calcula el parámetro a para que:

a) La recta y la circunferencia sean secantes.

b) La recta y la circunferencia sean tangentes.

3. Sean las circunferencias $x^2+y^2-4x-6y-23=0$ y $(x-6)^2+y^2+75+20y=0$.

a) Obtener el centro y el radio de cada circunferencia.

b) Calcula la potencia del punto $P(2,0)$ respecto ambas circunferencias. Según el signo de las potencias, indica la posición del punto $P(2,0)$ respecto cada circunferencia.

4. Calcula la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(8,3)$, con centro el origen de coordenadas, focos en el eje de abscisas y eje menor igual a 10 . Represéntala gráficamente, indicando las coordenadas de los puntos A, A', B, B', F, F' de la elipse.

Hoja 13

1. Sea una circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2 unidades. Sea una segunda circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3 unidades. Ambas circunferencias se cortan en los puntos A y B . Obtener la recta que une a los puntos A y B .

2. a) Sea un segmento de extremo inicial $A(1,2)$ y extremo final $B(3,-2)$. Obtener los extremos del segmento simétrico respecto a la simetría central de centro el punto $P(0,5)$.

b) Obtener el ángulo formado por el corte de las rectas $r:\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ y $s:y=\frac{-1}{3}x-1$

3. a) Determina la ecuación de las rectas tangentes a la elipse $2x^2+y^2=8$ trazadas desde el punto $P(-1,5)$.

b) Obtener la ecuación de la elipse de focos sobre una recta paralela al eje de abscisas, centrada en $(-1,3)$, con semieje menor 8 y excentricidad $\frac{3}{5}$.

4. Dada la elipse $x^2+2y^2=6$, obtener las coordenadas de un rectángulo inscrito en la elipse, de lados paralelos a los ejes de la elipse, y de perímetro 12 unidades. Representa la elipse gráficamente, indicando las coordenadas de los puntos A, A', B, B', F, F' , y representa también los cuatro vértices del rectángulo solución.