

Problemas – Tema 8

Enunciados de problemas de continuidad y límite de funciones

Hoja 1

1. Razona de manera justificada el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}}$

c) $f(x) = \frac{x}{\cos(x)}$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x=1$ y $x=5$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ \ln(x - 5) & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

3. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$

4. Sea la función $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$, donde a, b y c son números reales. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y=2$ y que la gráfica pasa por el punto $(1, \frac{3}{2})$.

Hoja 2

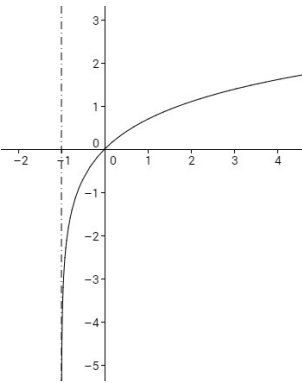
1. Relaciona de manera justificada las siguientes funciones con sus respectivas gráficas. Debes razonar con el máximo detalle posible.

- $f(x) = \ln(x+1)$

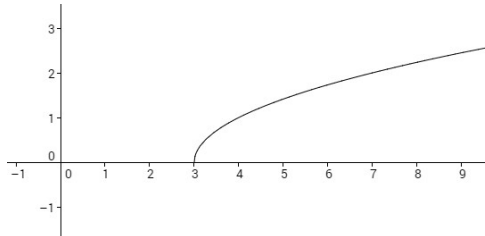
- $g(x) = \frac{x}{x-1}$

- $h(x) = \sqrt{x-3}$

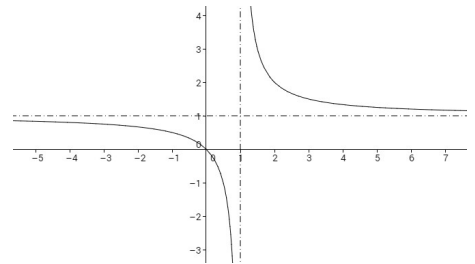
a)



b)



c)



2. Sea $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$.

a) Estudia la continuidad en $x = -1$ y en $x = 5$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

3. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5\sqrt{x})$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x} \right)$

4. Determina a y b para que la función sea continua en $x = 0$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Hoja 3

1. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1}$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

3. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4. Realiza la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ de la siguiente pareja de funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = \sqrt{2x-4}$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

5. Rompe a trozos la siguiente función con valor absoluto $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-|x|}$

Hoja 4

1. Rompe a trozos la función $f(x) = |x^2 + 1| + |x - 1|$.

2. Calcula los siguientes límites laterales.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x+2}{7-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3}$

3. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+1}{(5-x)^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

4. Dibuja a mano alzada la gráfica de una función que en un punto $x = x_0$ cumpla:

a) Límites laterales iguales a $+\infty$.

b) Límite lateral izquierdo igual a $+\infty$ y derecho igual a $-\infty$.

c) Límite lateral izquierdo igual a $-\infty$ y derecho igual a $+\infty$.

d) Límites laterales iguales a $-\infty$.

5. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

Hoja 5

1. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$

b) $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{3x}$

2. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^3+1}$

3. ¿Cuánto debe valer $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en $x_0=1$ para que $f(x)$ sea continua en x_0 ?

4. ¿Cuánto debe valer $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ en $x_0=2$ para que $f(x)$ sea continua en el punto x_0 ?

5. Calcula el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & \text{si } x=1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$.

Hoja 6

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

b) $f(x) = \frac{3x - 7}{x - 6}$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$.

3. Sea $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ y $g(x) = x - 1$. Calcula las siguientes funciones y sus dominios.

a) $f(x) + g(x)$

b) $g(x) - f(x)$

c) $f(x) \cdot g(x)$

d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

4. Calcula el dominio de $(f \circ g)(x)$, siendo $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$ y $g(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$.

5. Calcula a, b, c en $f(x) = a + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, la gráfica corta al eje de ordenadas en $y = 2$ y la función pasa por el punto $(1, \frac{3}{2})$.

6. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hoja 7

1. Responde con ayuda de Geogebra.

- ¿Es creciente la función $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ en $x = 3$?
- ¿En qué intervalos es creciente la función $f(x) = 2x^2 - 15x^2 + 36x + 2$?
- La función $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 1$ ¿es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo en $x = 5$?

2. Responde con ayuda de Geogebra. Hallar los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.

- $f(x) = x^2 - 6x + 3$
- $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$
- $f(x) = -x^5 + 3x^4$

3. Responde con ayuda de Geogebra. Hallar los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.

- $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$
- $f(x) = \text{sen}(x)$
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

4. Responde con ayuda de Geogebra. Hallar los máximos y los mínimos de las siguientes funciones.

- $f(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$
- $f(x) = (x+1)(x-5)(x-2)$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Hoja 8

1. En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función a fin que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

2. Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

3. Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). Calcula a, b y c.

4. Una parábola tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

5. Obtener la recta que pasa por el punto P(2, -3) y es paralela a la recta de ecuación $y = -x + 7$.

6. Representa la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

7. Tenemos una hoja de papel de base 18,84 cm y altura 30 cm. Si recortamos por una línea paralela a la base, a diferentes alturas, y enrollamos el papel, podemos formar cilindros de radio 3 cm y altura x. ¿Cuál es el dominio de la función volumen $V(x)$ del cilindro?

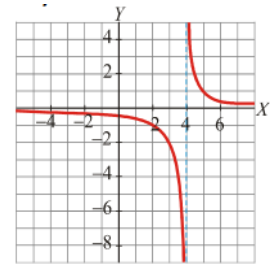
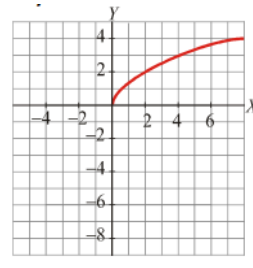
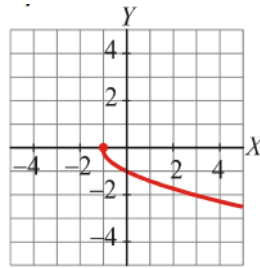
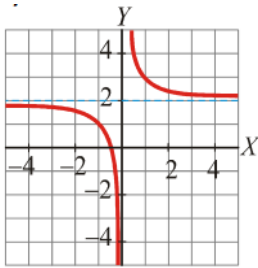
8. Representa gráficamente $f(x) = 2^{x-1}$ tomando como referencia la gráfica de $g(x) = 2^x$.

9. Representa gráficamente $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ tomando como referencia la gráfica de $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

10. Representa gráficamente $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ tomando como referencia la gráfica de $g(x) = x^2$.

Hoja 9

1. Indica la imagen de las siguientes gráficas de funciones.



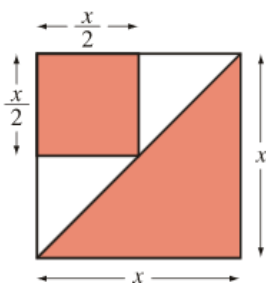
2. En un contrato de alquiler de una casa figura que el coste subirá un 2% cada año. Si el primer año se pagan 7200 euros (repartidos en 12 recibos mensuales):

- ¿Cuánto se pagará dentro de 1 año? ¿Y dentro de 2 años?
- Obtén la función que nos dé el coste anual al cabo de x años.

3. Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0°C se calienta, y su dilatación viene dada por una función lineal $L=a+bt$, donde L es la longitud en cm y t es la temperatura $^\circ\text{C}$.

- Halla la expresión analítica de L , sabiendo que $L(1)=30,0005\text{ cm}$ y que $L(3)=30,0015\text{ cm}$.
- Representa gráficamente la función obtenida.

4. En un cuadrado de lado $x\text{ cm}$, consideramos el área de la parte que está coloreada:



- Halla la ecuación que nos da el valor de dicha área en función del lado del cuadrado: $A(x)$.
- Representa gráficamente la función obtenida.

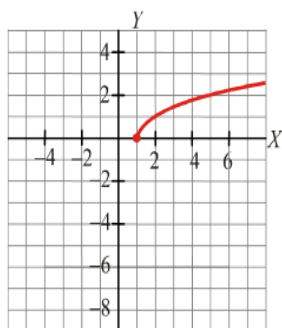
Hoja 10

1. Un tendero tiene 20 kg de manzanas que hoy venderá a 40 céntimos de euro/kg. Cada día que pasa se estropeará 1 kg y el precio aumentará 10 céntimos de euro/kg.

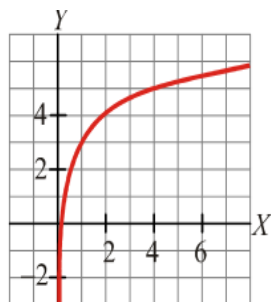
a) Escribe la ecuación que nos da el beneficio obtenido en la venta en función de los días que pasan hasta que vende las manzanas: $B(x)$.

b) Representa la función obtenida, considerando que x puede tomar cualquier valor $x \geq 0$,

2. Dada la gráfica de $f(x)$ obtener los valores de $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.



3. Dada la gráfica de $f(x)$ obtener los valores de $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$.



4. Halla la inversa de:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{3}$

b) $f(x) = \frac{-x+3}{2}$

Hoja 11

1. Calcula.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$

2. Calcula las asíntotas.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x}$

c) $f(x) = \frac{x}{1 + 2x}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

f) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

g) $f(x) = \frac{(3-x)^2}{2x+1}$

h) $f(x) = x + 1 + \frac{5}{x}$