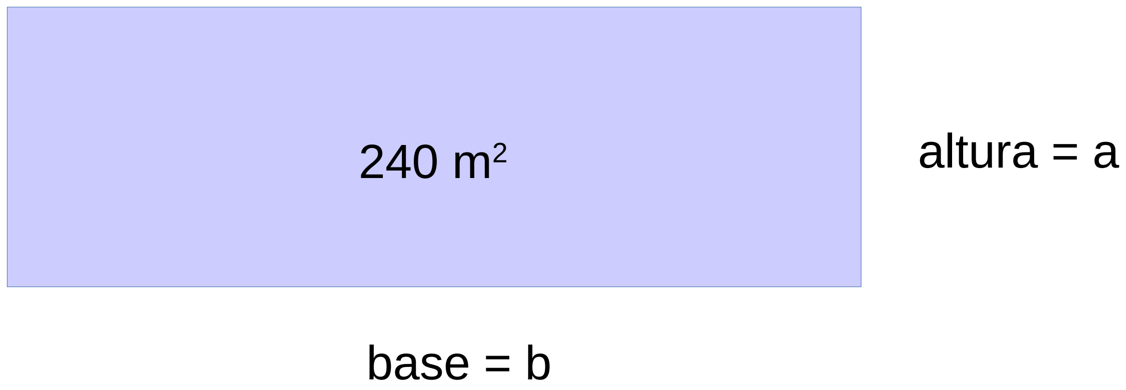
Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 01 - Todos resueltos

Hoja 1. Problema 1

1. Calcula las medidas de un rectángulo cuya superficie es de 240 metros cuadrados, sabiendo que el largo es 6 metros mayor que el triple del ancho.

Incógnitas del problema: $base=b$, $altura=a$



Interpretamos a lenguaje matemático las condiciones del enunciado.

Superficie = base · altura → $240\ m^2=b\cdot a$

El largo (base) es 6 metros mayor que el triple del ancho (altura) → $b=6+3a$

Hemos planteado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 240=b\cdot a \\ b=6+3a \end{Bmatrix}$$

Sustituimos el valor de a de la segunda ecuación en la primera.

$$240=a(6+3a) \quad\rightarrow\quad 3a^2+6a-240=0$$

Simplificando.

$$a^2+2a-80=0$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado, siendo a la incógnita, que podemos resolver con la expresión general.

$$a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-80)}}{2\cdot1}$$

$$a_1=8$$

$$a_2=-10$$

Tanto 8 como -10 son soluciones de la parábola $a^2+2a-80=0$, pero físicamente solo contemplamos soluciones positivas (es decir, distancias positivas). Por lo tanto tomamos como solución válida para nuestro problema $a_1=8m$.

Sustituimos.

$$b=6+3a$$

$$b=30 \quad m$$

Siempre que resolvamos una ecuación o sistema debemos verificar que los resultados obtenidos satisfacen las ecuaciones de partida, e interpretar los resultados.

La pareja de valores base = 30 m y altura = 8 m satisfacen el sistema de ecuaciones de partida, por lo que son la solución a nuestro problema.

Hoja 1. Problema 2

2. Dos caños que vierten agua juntos tardan dos horas en llenar un depósito. Manando separadamente, el primero emplea tres horas menos que el segundo. ¿Cuánto tiempo tarda cada uno solo?

Caudal grifo 1 (litros/hora) = x_1

Caudal grifo 2 (litros/hora) = x_2

Capacidad del depósito (litros totales) = d

Tiempo que tarda solo el grifo 1 en llenar el depósito (horas) = t_1

Tiempo que tarda solo el grifo 2 en llenar el depósito (horas) = t_2

Interpretamos a lenguaje matemático las frases del enunciado.

Juntos tardan dos horas en llenar el depósito → $2x_1+2x_2=d$

Solo el primer grifo → $t_1 x_1=d$

Solo el segundo grifo → $t_2 x_2=d$

El primer grifo tarda tres horas menos que el segundo → $t_1=t_2-3$

Tenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cinco incógnitas.

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2&=d \\ t_1 x_1&=d \\ t_2 x_2&=d \\ t_1&=t_2-3 \end{aligned}$$

Es decir, tenemos un grado de libertad que puede corresponder con el valor arbitrario del depósito d, al que podemos dar cualquier valor no nulo. Por ejemplo $d=1$ para simplificar operaciones.

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2&=1 \\ t_1 x_1&=1 \\ t_2 x_2&=1 \\ t_1&=t_2-3 \end{aligned}$$

De la segunda y tercera ecuación obtenemos valores del caudal en función del tiempo, para cada grifo, y de la tercera sabemos el tiempo del segundo grifo en función del tiempo del primero.

$$x_1=\frac{1}{t_1}$$
$$x_2=\frac{1}{t_2}$$
$$t_2=t_1+3$$

Sustituyendo estos valores en la primera ecuación, nos queda una única igualdad que solo depende del tiempo t_1.

$$\frac{2}{t_1}+\frac{2}{t_1+3}=1$$

Obtenemos una ecuación racional, donde el m.c.m de los denominadores es $t_1(t_1 + 3)$.

$$\frac{2(t_1+3)+2t_1}{t_1(t_1+3)}=1$$
$$(t_1)^2-t_1-6=0$$

Cuyas dos raíces son: -2, 3. Físicamente solo consideramos tiempos positivos, por lo que t_1 = 3 horas.

$$t_2=t_1+3$$
$$t_2=6 \quad horas$$

La pareja de valores t_1 = 3 horas y t_2 = 6 horas satisfacen el sistema de ecuaciones de partida, por lo que son la solución a nuestro problema.

Hoja 1. Problema 3

3. Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1}-\frac{2x-1}{1+x}=3$

Obtenemos el m.c.m. de los denominadores de la ecuación racional: $(x-1)(x+1)$

$$\frac{4(x+1)-(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=3$$

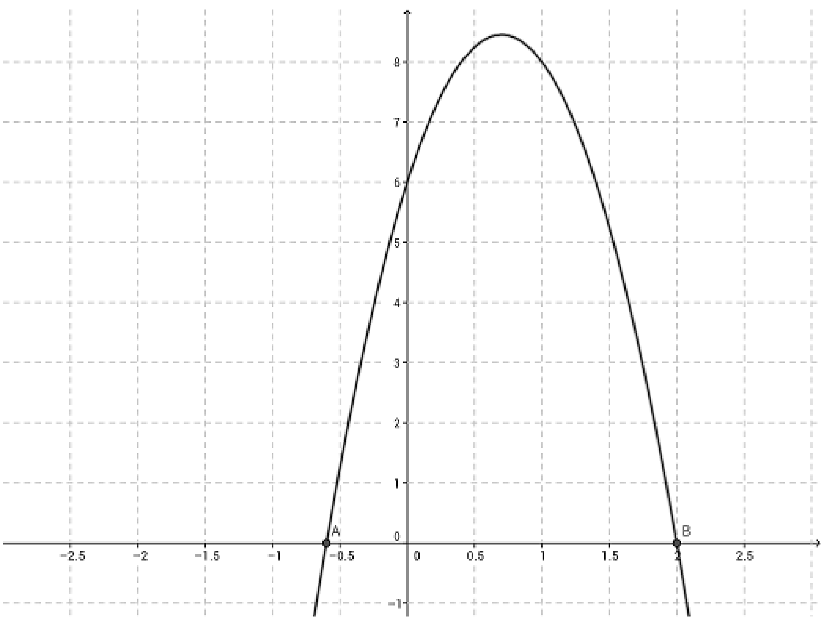
$$-5x^2+7x+6=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-5)\cdot 6}}{2\cdot(-5)}$$

$$x_1=\frac{-3}{5}$$

$$x_2=2$$

La pareja de valores $x_1=\frac{-3}{5}$ y $x_2=2$ satisfacen la ecuación de partida y no hacen nulo el denominador. Si representamos la parábola generada por la ecuación de segundo grado planteada, podemos ver que las soluciones son los puntos de corte de la parábola con el eje horizontal OX.



Hoja 1. Problema 4

4. Halla los valores de x e y que verifican $\begin{Bmatrix} 2x+y=-1 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{-1}{15} \end{Bmatrix}$

De la primera ecuación del sistema despejamos el valor de y .

$$y=-1-2x$$

Que sustituimos en la segunda ecuación.

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{-(1+2x)}=\frac{-1}{15}$$
$$\frac{-2(2x+1)+3x}{-x(2x+1)}=\frac{-1}{15}$$
$$\frac{-x-2}{-x-2x^2}=\frac{-1}{15}$$
$$x^2+8x+15=0$$
$$x_1=-3$$
$$x_2=-5$$

La pareja de soluciones para la variable x genera sus correspondientes soluciones para la variable y , que satisfacen el sistema de partida.

$$Si \quad x_1=-3 \rightarrow y_1=5$$
$$Si \quad x_2=-5 \rightarrow y_2=9$$

Hoja 1. Problema 5

5. Halla los valores de m para que la ecuación $(m+1)x^2-(2m+5)x+6=0$ tenga dos raíces, una el triple de la inversa de la otra.

Tenemos una ecuación de segundo grado general.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a=m+1$$
$$b=-(2\mathrm{m}+5)$$
$$c=6$$
$$x=\frac{(2m+5)\pm\sqrt{(2m+5)^2-4(m+1)6}}{2(m+1)}$$
$$x=\frac{(2m+5)}{2(m+1)}\pm\frac{\sqrt{(2m+5)^2-4(m+1)6}}{2(m+1)}$$
$$x=\frac{(2m+5)}{2(m+1)}\pm\frac{\sqrt{4m^2-4m+1}}{2(m+1)}$$
$$x=\frac{(2m+5)}{2(m+1)}\pm\frac{2m-1}{2(m+1)}$$
$$x_1=\frac{(2m+5)}{2(m+1)}+\frac{2m-1}{2(m+1)}=\frac{4m+4}{2(m+1)}=2$$
$$x_2=\frac{(2m+5)}{2(m+1)}-\frac{2m-1}{2(m+1)}=\frac{6}{2(m+1)}$$

Del enunciado sabemos que una raíz es el triple de la inversa de la otra.

$$x_1=\frac{3}{x_2}$$
$$x_1=\frac{3}{\frac{6}{2(m+1)}}=m+1$$

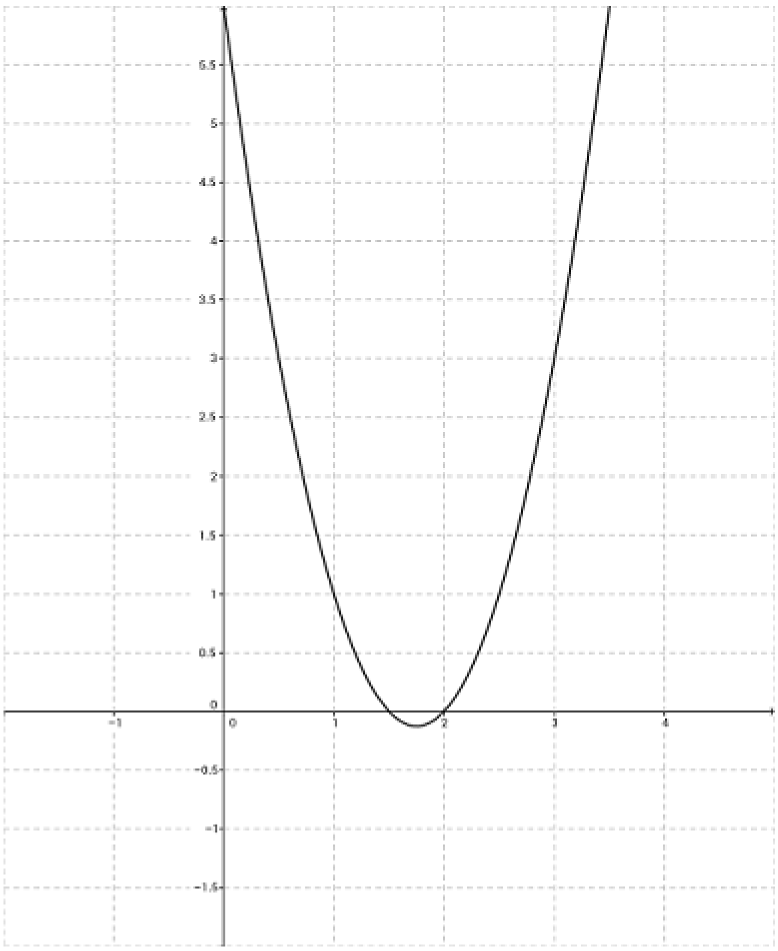
Igualamos esta expresión al resultado anterior de $x_1=2$.

$$2=m+1\rightarrow m=1$$

Podemos verificar que, para $m=1$, la ecuación de partida toma dos soluciones reales que cumplen las condiciones del enunciado.

$$2x^2-7x+6=0$$
$$x_1=2$$
$$x_2=\frac{3}{2}$$

Como podemos verificar en su representación, los puntos de corte de la parábola con el eje OX son $x=\frac{3}{2}$ y $x=2$.



Hoja 1. Problema 6

6. Resuelve $\left\{ \begin{matrix} x^2 - y^2 = \dfrac{143}{9} \\ (x-y)^2 = \dfrac{121}{9} \end{matrix} \right\}$

En la primera ecuación reconocemos el binomio "suma por diferencia" $(x-y)(x+y)$. Para obtener una relación sencilla de una de las incógnitas, dividimos miembro a miembro las dos ecuaciones.

$$\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{143}{121}$$

Simplificando.

$$121(x+y) = 143(x-y)$$
$$x = 12y$$

Sustituimos el valor obtenido para x en la primera ecuación del sistema, y obtenemos dos parejas de soluciones válidas.

$$(12y)^2 - y^2 = \frac{143}{9}$$
$$y^2 = \frac{1}{9}$$
$$y_1 = \frac{1}{3} \rightarrow x_1 = 4$$
$$y_1 = \frac{-1}{3} \rightarrow x_1 = -4$$

Hoja 1. Problema 7

7. Calcula las raíces de $\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{2x-1}-2$ **.**

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=-1$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$(3x+1)+(2x-1)-2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}=1$$
$$5x-1=2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}$$

Volvemos a elevar al cuadrado ambos miembros.

$$25x^2+1-10x=4(6x^2-x-1)$$
$$x^2-6x+5=0$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}$$
$$x=5$$
$$x=1$$

Al sustituir estos valores en la ecuación de partida, llegamos a absurdo ya que no se cumple la igualdad de partida. Por lo tanto, concluimos que no existen soluciones pertenecientes al cuerpo de los números reales para nuestro problema.

Hoja 1. Problema 8

8. Resuelve la ecuación $34-x^2=\frac{225}{x^2}$ **.**

$$x^4-34x^2+225=0$$

Tenemos una ecuación bicuadrática que resolvemos con el cambio de variable $t=x^2$.

$$t^2-34t+225=0$$
$$t=\frac{34\pm\sqrt{256}}{2}$$
$$t_1=25$$
$$t_2=9$$

No debemos olvidar invertir el cambio de variable realizado inicialmente, con objeto de obtener los valores de la incógnita x de partida.

$$x=\pm\sqrt{25}\rightarrow x_1=5,\quad x_2=-5$$
$$x=\pm\sqrt{9}\rightarrow x_3=3,\quad x_4=-3$$

Cuatro soluciones para una ecuación polinómica de cuarto grado que presenta, como puede verse en la gráfica, tres extremos relativos (n -1, siendo n el grado del polinomio).