

## Problemas – Tema 1

### Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 21 - Todos resueltos

#### Hoja 21. Problema 1

**1. Mensualmente los socios de una peña quinielística juegan 520 €. Si hubiera siete socios más, aportarían 14 € menos. ¿Cuántos socios hay en la peña y cuál es la cuota mensual que paga cada socio?**

La incógnita  $x$  es el número de socios e  $y$  la cantidad de dinero que juega cada uno. Planteo un sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 520 \\ (x+7) \cdot (y-14) = 520 \end{cases}$$

Para resolver este problema despejaré  $x$  en la ecuación segunda y luego sustituiré el resultado en la ecuación primera. Es decir, usaré el método de sustitución:

$$\begin{aligned} (x+7) \cdot (y-14) = 520 &\rightarrow xy + 7y - 14x - 98 = 520 \rightarrow x(y-14) = 618 - 7y \\ \frac{618 - 7y}{y-14} &= x \end{aligned}$$

Llevo este valor a la primera ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{618 - 7y}{y-14} y = 520 &\rightarrow 618y - 7y^2 = 520y - 7280 \rightarrow -7y^2 + 98y + 7280 = 0 \\ y = \frac{-98 \pm \sqrt{98^2 - 4 \times (-7) \times 7280}}{2 \times (-7)} &\rightarrow \begin{cases} y = 40 \\ y = -26 \end{cases} \end{aligned}$$

Escojo la solución positiva, ya que no pueden pagar una cuota negativa. Y despejo  $x$  en la primera ecuación de partida:

$$x = \frac{520}{40} \rightarrow x = 13$$

Es decir:  $x = 13$  socios ,  $y = 40€$  de cuota por cada socio.

## Hoja 21. Problema 2

2. Calcula el valor de  $m$  en la ecuación  $x^2 + mx - (m^2 + 1) = 0$  sabiendo que sus raíces se diferencian en 3 unidades.

$$x^2 + mx - (m^2 + 1) = 0 \rightarrow a = 1, b = m, c = -(m^2 + 1) \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4(m^2 + 1)}}{2} \rightarrow x = \frac{-m \pm \sqrt{5m^2 + 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-m + \sqrt{5m^2 + 4}}{2}, x_2 = \frac{-m - \sqrt{5m^2 + 4}}{2} \rightarrow x_1 - x_2 = 3$$

Sustituimos.

$$\frac{-m + \sqrt{5m^2 + 4}}{2} - \frac{-m - \sqrt{5m^2 + 4}}{2} = 3 \rightarrow \frac{2\sqrt{5m^2 + 4}}{2} = 3 \rightarrow \sqrt{5m^2 + 4} = 3 \rightarrow 5m^2 + 4 = 9$$

$$5m^2 = 5 \rightarrow m = \pm 1$$

Si  $m = 1 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$

Si  $m = -1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$

## Hoja 21. Problema 3

3. a) Resuelve  $4^{x^2-6x}=16384$

b) Resuelve  $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0$

a)  $4^{x^2-6x}=16384 \rightarrow 4^{x^2-6x}=4^7 \rightarrow$  Igualo exponentes  $\rightarrow x^2-6x=7 \rightarrow x^2-6x-7=0$

Soluciones  $\rightarrow x=-1$  ,  $x=7$

b)  $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0 \rightarrow 343\cdot 7^{2x}-56\cdot 7^x+1=0 \rightarrow$  cambio de variable  $7^x=t$

$$343\cdot t^2-56\cdot t+1=0 \rightarrow t=\frac{56\pm\sqrt{56^2-4\cdot 343}}{2\cdot 343}=\frac{56\pm 42}{2\cdot 343} \rightarrow t=\frac{1}{7} \text{ , } t=\frac{1}{49}$$

Deshacemos el cambio de variable.

$$7^x=t \rightarrow 7^x=\frac{1}{7} \rightarrow 7^x=7^{-1} \rightarrow x=-1$$

$$7^x=t \rightarrow 7^x=\frac{1}{49} \rightarrow 7^x=7^{-2} \rightarrow x=-2$$

## Hoja 21. Problema 4

4. Resuelve 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x-2} - \frac{x}{2+x} \leq \frac{-7}{4-x^2} \\ x^2 > 1 \end{array} \right\}$$

Resolvemos cada inecuación por separado, y luego haremos la intersección de las soluciones individuales.

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x}{2+x} \leq \frac{-7}{4-x^2} \rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{x}{2+x} + \frac{7}{4-x^2} \leq 0$$

$$4-x^2 = (2-x)(2+x) = -(x-2)(x+2)$$

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x+2} - \frac{7}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Unificamos en una sola fracción.

$$\frac{2(x+2) - x(x-2) - 7}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \rightarrow \frac{2x+4 - x^2 + 2x - 7}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Raíces del numerador  $\rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$

Raíces del denominador  $\rightarrow (x+2)(x-2) = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$

Evaluamos el signo de la fracción de la inecuación en los siguientes intervalos (ojo con la factorización del numerador  $-x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$ ).

$$(-\infty, -2) \rightarrow x = -10 \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

$$(-2, 1) \rightarrow x = 0 \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} > 0 \rightarrow \text{No cumple la inecuación}$$

$$(1, 2) \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

$$(2, 3) \rightarrow x = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} > 0 \rightarrow \text{No cumple la inecuación}$$

$$(3, +\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{-(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

La solución particular de la primera inecuación es  $(-\infty, -2) \cup [1, 2) \cup [3, \infty)$ .

Estudiamos la segunda inecuación.

$$x^2 > 1 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Raíces } x = \pm 1$$

Evaluamos en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1) \rightarrow x=-10 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

$$(-1, 1) \rightarrow x=0 \rightarrow x^2 - 1 < 0 \rightarrow \text{No cumple la inecuación}$$

$$(1, +\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

La solución particular de la segunda inecuación es  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

La solución final del sistema es la intersección de las dos soluciones particulares. Es decir:

$$(-\infty, -2) \cup (1, 2) \cup [3, +\infty)$$

## ■ Hoja 21. Problema 5

**5. Calcula el valor de  $m$  en la ecuación  $x^2 + m x - (m^2 + 1) = 0$  sabiendo que sus raíces se diferencian en 3 unidades.**

Ver ejercicio 2 de esta hoja.

## Hoja 21. Problema 6

6. Resuelve  $\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} + \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$

Aplicamos mínimo común múltiplo.

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} + \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{4x+36+x-12\sqrt{x}}{(6-\sqrt{x})2\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{5x+36-12\sqrt{x}}{12\sqrt{x}-2x} = \frac{5}{2}$$
$$10x+72-24\sqrt{x}=60\sqrt{x}-10x \rightarrow 20x+72=84\sqrt{x}$$

Elevamos ambos términos al cuadrado.

$$400x^2+5184+2880x=7056x \rightarrow 400x^2-4176x+5184=0$$

Simplifico dividiendo por 2 .

$$200x^2-2088x+2592=0 \rightarrow x = \frac{2088 \pm \sqrt{2088^2 - 4 \cdot 200 \cdot 2592}}{400}$$
$$x = \frac{2088 \pm 1512}{400} \rightarrow x = 9, \quad x = \frac{36}{25}$$

Ninguna de estas soluciones hace negativo el discriminante de las raíces de partida, y satisfacen la ecuación. Ambos valores son la solución.



## Hoja 21. Problema 7

7. Representa gráficamente  $y = |2x - 3| + |x - 1|$  .

Rompemos el primer valor absoluto.

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Si  $x < \frac{3}{2} \rightarrow 2x - 3 < 0 \rightarrow$  Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si  $x > \frac{3}{2} \rightarrow 2x - 3 > 0$

$$y = \begin{cases} -2x + 3 + |x - 1| & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 + |x - 1| & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Rompemos el segundo valor absoluto.

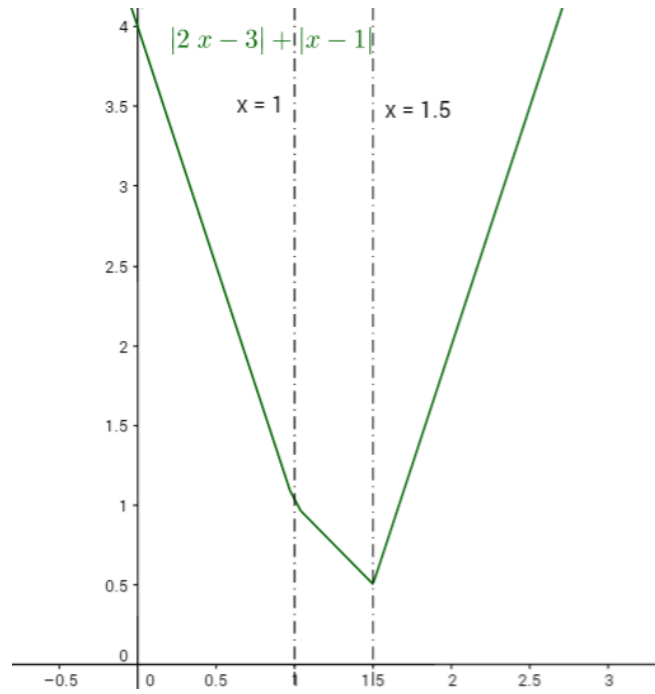
$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Si  $x < 1 \rightarrow x - 1 < 0 \rightarrow$  Cambiar signo del argumento del valor absoluto

Si  $x > 1 \rightarrow x - 1 > 0$

$$y = \begin{cases} -2x + 3 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + 3 + x - 1 & \text{si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 + x - 1 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -3x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

En cada tramo tenemos una recta, que podemos representar obteniendo un par de puntos en cada tramo. Con ayuda de Geogebra la gráfica quedaría:



## ■ Hoja 21. Problema 8

**8. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los puntos de corte de las rectas que delimitan la zona solución.**

$$\begin{cases} 5x + y \leq 5 \\ 3x - 2y \leq 4 \\ \frac{x}{2} - y > 0 \end{cases}$$