Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso 4ºESO - Hoja 07- Problemas 1, 2, 3, 5, 6, 8

Hoja 7. Problema 1

Resuelto por Juan Luís Pérez (septiembre 2014)

1. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 2 cm más que el otro y 2 cm menos que la hipotenusa. Calcula las longitudes de los lados.

El teorema de Pitágoras afirma que, en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

hipotenusa = a

cateto mayor = $a-2$

cateto menor = $a-4$

$a^2=(a-4)^2+(a-2)^2$

Nos encontramos con un binomio de Newton de orden dos.

$$a^2=(a^2+16-2\cdot a\cdot 4)+(a^2+4-2\cdot a\cdot 2) \rightarrow a^2= a^2+16-8a+ a^2+4-4a$$

$$a^2-2a^2+12a-20=0 \rightarrow -a^2+12a-20=0$$

Usamos la fórmula de las ecuaciones de segundo grado.

$$a=\frac{-12\pm\sqrt{12^2+((-4)\cdot(-20)\cdot(-1))}}{2\cdot(-1)} \rightarrow a=\frac{-12\pm 8}{-2} \rightarrow a=2 \ , \ a=10$$

Por lo tanto la hipotenusa es $a=10\,cm$, porque si usáramos el valor 2 nos saldrían los catetos con valores negativos.

Si despejamos los catetos: $8\,cm, 6\,cm$.

Hoja 7. Problema 2

Resuelto por Juan Luís Pérez (septiembre 2014)

2. Resuelve.

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{2}=\frac{17}{6}$$

Sacamos común denominador en el miembro de la izquierda y hallamos los numeradores correspondientes.

$$\frac{2}{(x^2-1)\cdot 2}+\frac{x^4-1}{(x^2-1)\cdot 2}=\frac{17}{6} \rightarrow \ 6\cdot(2+x^4-1) = 17 \cdot (x^2-1) \cdot 2$$

Operamos.

$$12+6x^4-6=34x^2-34 \rightarrow 6x^4-34x^2+40 = 0$$

Sustituimos $x^2=t$, de manera que nos quedará una ecuación de segundo grado.

$$6t^2-34t+40 = 0$$

Utilizamos la fórmula de ecuaciones de segundo grado.

$$t=\frac{34\pm\sqrt{34^2-(4\cdot 6\cdot 40)}}{2\cdot 6} \rightarrow t=\frac{34\pm\sqrt{196}}{12} \rightarrow t=\frac{34\pm 14}{12} \rightarrow t= 4 , \frac{5}{3}$$

Deshacemos el cambio de variable → $x=\pm 2 , \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Los cuatros valores satisfacen la ecuación de partida.

Hoja 7. Problema 3

Resuelto por Luís Fernando Martín (septiembre 2014)

3. Encontrar un número que sumado con el doble de su raíz cuadrada dé 24.

Un número, x, que sumado con el doble de su raíz debe ser igual a 24, da lugar a la siguiente ecuación:

$$x+(2\cdot\sqrt{x})=24$$

Operando:

$$((2\cdot\sqrt{x})^2=(24-x)^2$$

$$x^2-52x+576=0$$

$$x=\frac{52\pm\sqrt{52^2-4\cdot 576}}{2}$$

$$x=\frac{52\pm 20}{2}$$

$$x=16$$
$$x=36$$

Si sustituimos estos dos valores en la primera fórmula comprobamos que 36 no cumple la ecuación de partida mientras que 16 si la cumple. Por tanto podemos afirmar que 16 es la solución a nuestro problema.

Hoja 7. Problema 5

Resuelto por Jorge García del Castillo (septiembre 2015)

5. Resuelve.

$$\frac{-3x^2+6x-3}{x^2-9}<0$$

Obtenemos las raíces del numerador → $-3x^2+6x-3=0$ → $-x^2+2x-1=0$ →
→ $x^2-2x+1=0$ → $x=1$ → raíz doble.

Obtenemos las raíces del denominador → $x^2-9=0$ → $x=-3$, $x=3$.

Estudiamos el signo de la fracción en los siguientes intervalos:

$$f(x)=\frac{-3(x-1)^2}{(x+3)(x-3)}$$

$(-\infty,-3)$ → $f(-10)<0$ → intervalo solución

$(-3,1)$ → $f(0)>0$

$(1,3)$ → $f(2)>0$

$(1,\infty)$ → $f(10)<0$ → intervalo solución

La solución será la unión de los intervalos donde $f(x)=\frac{-3(x-1)^2}{(x+3)(x-3)}<0$.

Es decir: $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

Hoja 7. Problema 6

Resuelto por Alejandro Vega (septiembre 2015)

3. Resuelve $|x-1|\geqslant 2$

La inecuación $|x-1|\geqslant 2$ implica dos condiciones: $x-1\geq 2$, $x-1\leq -2$

Si $x-1\geq 2 \rightarrow x\geq 3$

Si $x-1\leq -2 \rightarrow x\leq -1$

Uniendo amba condiciones, obtenemos la solución (-∞, -1] U [3, +∞).

Hoja 7. Problema 8

Resuelto por Marta Gómez Sánchez (septiembre 2015)

8. Halla un número entero y positivo que sumado con 11, resulte mayor que el triple de él, disminuido en 7, y que sumado con 5 sea menor que el doble de él, disminuido en 2.

El número que buscamos es x , entero y positivo. Traducimos a ecuaciones cada una de las frases del enunciado.

$$x+11>3x-7 \quad \rightarrow \quad 18>2x \quad \rightarrow \quad 9>x$$
$$x+5<2x-2 \quad \rightarrow \quad 7<x$$

Ambas condiciones solo se cumplen para el número entero 8 .