Problemas – Tema 2

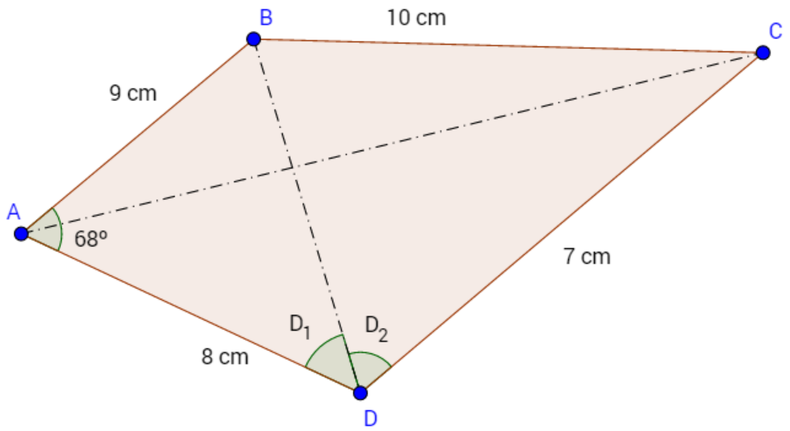
Solución a problemas de Trigonometría - Hoja 9 - Problemas 2, 5

Hoja 9. Problema 2

Resuelto por Beatriz Moreu Pérez-Artacho (noviembre 2015)

2. Las longitudes de los lados de un cuadrilátero son 7cm, 8cm, 9cm y 10cm respectivamente. El ángulo A que forman los lados de longitud 8cm y 9cm es de 68º. Calcula las longitudes de las diagonales del cuadrilátero.

Trazamos un dibujo para ilustrar el problema (el dibujo es aproximado, la forma y dimensiones no tienen por qué coincidir con la solución final del problema).



Aplicando el teorema del coseno podemos obtener la diagonal $\overline{BD}$ con la siguiente ecuación.

$$(\overline{BD})^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos(68º)$$

$$(\overline{BD})^2 = 145 - 144 \cdot \cos(68º) \quad \rightarrow \quad (\overline{BD})^2 = 145 - 144 \cdot \cos(68º)$$

$$(\overline{BD})^2 = 91{,}057 \quad \rightarrow \quad \overline{BD} = 9{,}542 \quad cm$$

Para conocer la diagonal $\overline{AC}$ por el teorema del coseno necesitamos conocer, previamente, el ángulo del vértice $\hat{D}$. Este vértice podemos dividirlo en dos ángulos: $\hat{D}_1$ y $\hat{D}_2$. Vamos a determinar estos dos ángulos, y su suma nos dará el vértice $\hat{D}$ que nos permitirá determinar la diagonal $\overline{AC}$.

¿Cómo obtener $\hat{D}_1$? Aplicando el teorema del seno en el triángulo ABD .

$$\frac{9{,}542}{sen(68º)}=\frac{9}{sen(\hat{D}_1)} \rightarrow sen(\hat{D}_1)=\frac{9\cdot sen(68º)}{9{,}542}$$

$$sen(\hat{D}_1)=0{,}875 \rightarrow \hat{D}_1=60{,}988^o \ , \ \hat{D}_1=180º-60{,}988^o=119{,}012^o$$

Tenemos dos ángulos candidatos. ¿Cuál elegir?

El valor $\hat{D}_1=60{,}988^o$, ya que si fuese $\hat{D}_1=119{,}012^o$ la suma de ángulos del triángulo ABD superaría el valor de 180º ya que $\hat{A}+\hat{D}_1=68º+119{,}012^o>180º$.

¿Cómo obtener $\hat{D}_2$? Aplicando el teorema del coseno en el triángulo BCD .

$$10^2=7^2+9{,}542^2-2\cdot 7\cdot 9{,}452\cdot\cos(\hat{D}_2)$$

$$100=140{,}05-132{,}328\cdot\cos(\hat{D}_2) \rightarrow \frac{-40{,}05}{-132{,}328}=\cos(\hat{D}_2)$$

$$\cos(\hat{D}_2)=0{,}303 \rightarrow \hat{D}_2=72{,}383^o \ , \ \hat{D}_2=360º-72{,}383^o=287{,}617^o$$

Nuevamente tenemos dos ángulos candidatos. ¿Cuál elegir?

El valor $\hat{D}_2=72{,}383^o$, ya que si fuese $\hat{D}_2=287{,}617^o \rightarrow \hat{D}=\hat{D}_1+\hat{D}_2=348{,}605^o \rightarrow$ y este vértice $\hat{D}$ sumado al valor del vértice $\hat{A}=68º$ generaría un ángulo mayor a 360º, lo cual no es posible en un cuadrilátero.

Por lo tanto:

$$\hat{D}=\hat{D}_1+\hat{D}_2=60{,}988^o+72{,}383^o=133{,}371^o$$

Con este valor del vértice $\hat{D}$ aplicamos el teorema del coseno para obtener la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.

$$(\overline{AC})^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos(133{,}371^o) \rightarrow (\overline{AC})^2=113-112\cdot\cos(133{,}371^o)$$

$$(\overline{AC})^2=189{,}913 \rightarrow \overline{AC}=13{,}78 \ cm$$

Hoja 9. Problema 5

Resuelto por Clara Meca (noviembre 2014)

5. Un trapecio rectángulo tiene la base mayor de 10cm, la base menor d 6cm, y el lado oblicuo forma con la base mayor un ángulo de 30º. Calcula el perímetro y el área del trapecio.

En el trapecio podemos formar un triángulo rectángulo donde el ángulo de 30º tenga de cateto contiguo (10- 6) cm, de lado opuesto igual a la altura, y de hipotenusa la línea oblicua que une las dos bases.

$$tg\ 30^o = \frac{lado\ opuesto}{lado\ continuo}$$

$$tg\ 30^o = \frac{lado\ \ opuesto}{10-6} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{lado\ \ opuesto}{4} \quad \rightarrow \quad lado\ \ opuesto = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

La hipotenusa la obtenemos aplicando Pitágoras.

$$h^2 = 4^2 + \left(\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Ya podemos obtener el perímetro y el área.

$$P = 10+6+(lado\ \ opuesto)+h = \frac{48+12\cdot\sqrt{3}}{3}\quad cm$$

$$A = \frac{(B+b)\cdot altura}{2} = \frac{(10+6)\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{32\cdot\sqrt{3}}{3}\quad cm^2$$