Actividad con Geogebra

Lanzamiento parabólico - Actividad conjunta con Física y Química

Descripción de la actividad

Título: Lanzamiento parabólico

Curso: 1ºBachillerato Ciencias

Asignaturas implicadas: Matemáticas, Física y Química

Objetivos:

- Realizar simulaciones físicas con el software Geogebra.
- Utilizar con destreza CAS y Vista Gráfica de Geogebra.
- Aplicar contenidos de trigonometría y vectores a situaciones de la vida cotidiana.
- Comprender la descomposición del movimiento parabólico en una componente horizontal y en otra componente vertical.

Contenidos:

- Proyecciones ortogonales de un vector en dos dimensiones.
- Ecuaciones de MRU y MRUA.
- Gráfica de una parábola.
- Expresión paramétrica de una función en dos dimensiones.
- Introducción al concepto de derivada para obtener el vértice de una parábola.
- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

Actividad 1

Con ayuda del botón Deslizador  creamos los siguientes cinco deslizadores:

x_0 → Coordenada horizontal del punto de lanzamiento → Intervalo $[-2,2]$ e incremento 0.5 .

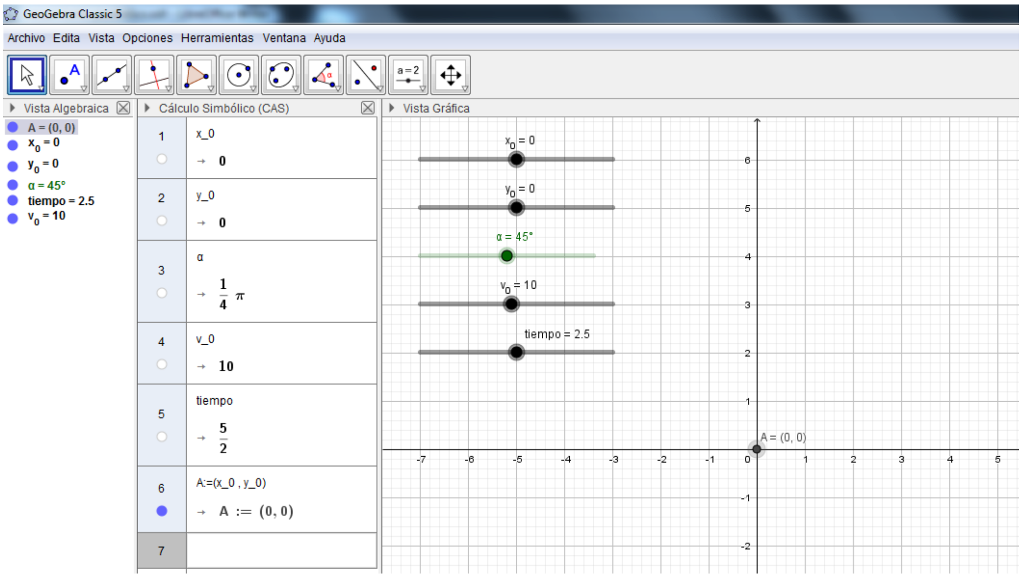
y_0 → Coordenada vertical del punto de lanzamiento → Intervalo $[-2,2]$ e incremento 0.5 .

α → Ángulo de lanzamiento (grados) → Intervalo $[5^o, 85^o]$ e incremento 5^o .

v_0 → Velocidad de inicio → Intervalo $[1,20]$ e incremento 1 .

$tiempo$ → Valor temporal máximo para dibujar la parábola → Intervalo $[0,5]$ e incremento 0.5 .

Imagen 1: Captura de pantalla de Vista Algebraica, CAS y Vista Gráfica con los deslizadores.



Además, en la ventana de CAS, escribimos una línea para cada deslizador.

Definimos en CAS el punto de lanzamiento con la expresión $A := (x_0, y_0)$ y mostramos el punto en Vista Gráfica (seleccionando el icono circular junto a la línea de CAS).

¿Cómo fijar la posición de un deslizador en pantalla?

Colocamos el deslizador en la posición que deseemos y pulsamos sobre él con el botón derecho del ratón. Elegimos “Propiedades” y aparecerá un menú lateral para configurar distintos parámetros. En la pestaña “Deslizador” marcamos la casilla “Fijado”.

Actividad 2

El movimiento parabólico se descompone en un movimiento horizontal con velocidad constante (MRU) y en un movimiento vertical que sufre la aceleración gravitatoria (MRUA).

El vector velocidad inicial se descompone en su componente horizontal usando el coseno y en su componente vertical usando el seno.

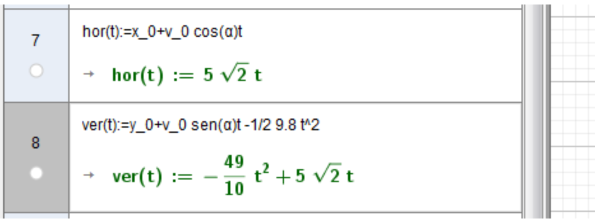
Si llamamos t a la variable tiempo, podemos expresar ambos movimientos con las siguientes ecuaciones que introducimos en CAS:

$$hor(t) := x_0 + v_0 \cos(\alpha) t$$

$$ver(t) := y_0 + v_0 sen(\alpha) t - (1/2) 9.8 t^2$$

Si t es la variable, el movimiento horizontal genera una recta y el movimiento vertical una parábola. No dibujamos ambas funciones en la Vista Gráfica (para mostrar/ocultar usamos el icono circular que aparece junto a las líneas del CAS).

Imagen 2: Detalle en CAS de las ecuaciones del movimiento horizontal y vertical. La variable t indica tiempo.



Actividad 3

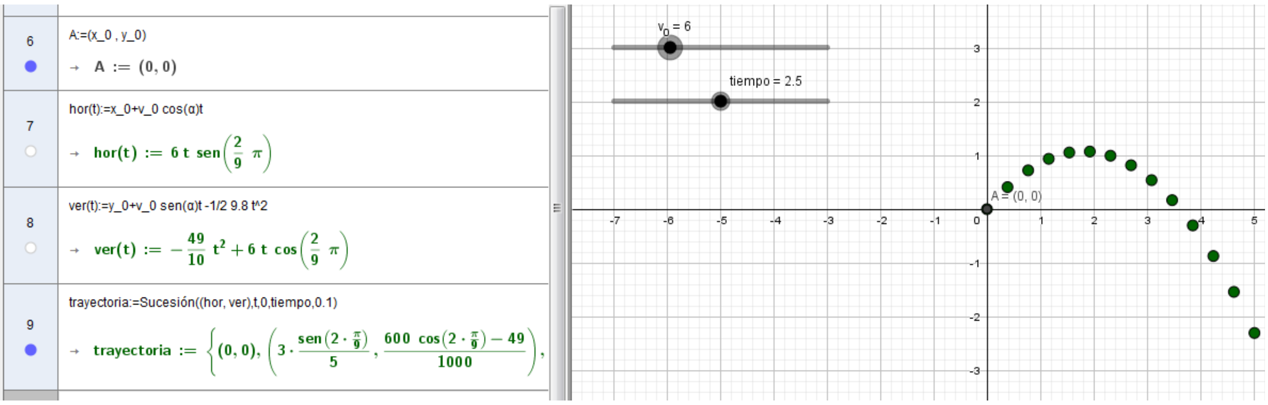
Vamos a pedirle a Geogebra que nos dibuje en al Vista Gráfica el movimiento del objeto cada 0.1 segundos. Es decir, vamos a pintar la trayectoria del objeto a intervalos de 0.1 segundos.

Usamos el comando Sucesión para obtener la pareja de valores $(hor(t), ver(t))$ desde $t=0$ hasta $t=tiempo$, con un salto de 0.1 segundos en cada iteración:

$$trayectoria := Sucesión((hor, ver), t, 0, tiempo, 0.1)$$

De esta manera almacenamos en la variable trayectoria una lista de puntos, que podemos ver en Vista Gráfica activando el icono circular de la fila correspondiente en CAS.

Imagen 3: Detalle de la lista de puntos almacenada en la variable trayectoria y representada en Vista Gráfica



Actividad 4

A estas alturas de curso de 1ºBachillerato aún no sabemos derivar. No obstante, sí podemos utilizar el comando de Geogebra que deriva una función.

Por ahora, basta saber que la derivada es una medida del crecimiento o del decrecimiento de una función. Si la derivada es igual a cero, significa que la función puede presentar un máximo o un mínimo. En nuestro caso, la trayectoria del objeto es una parábola. El vértice de la parábola será un máximo de la función.

Por lo tanto, vamos a derivar la función de la componente vertical, igualamos a cero y resolvemos la ecuación de primer grado resultante. Todo con comandos de CAS.

En la variable realizarDerivada almacenamos la derivada de la componente vertical. Fíjate cómo se usa el comando Derivada.

$$realizarDerivada := Derivada(ver, t)$$

En la variable tiempoVertice almacenamos la soluciones de igualar la derivada a cero. Fíjate cómo se usa el comando Soluciones.

$$tiempoVertice := Soluciones(realizarDerivada = 0)$$

El valor almacenado en tiempoVertice nos sirve para obtener la coordenda horizontal y la coordenada vertical del vértice. Para ello, debemos sustituir tiempoVertice en la expresión de $hor(t)$ y de $ver(t)$.

$$Vertice_x := hor(tiempoVertice)$$

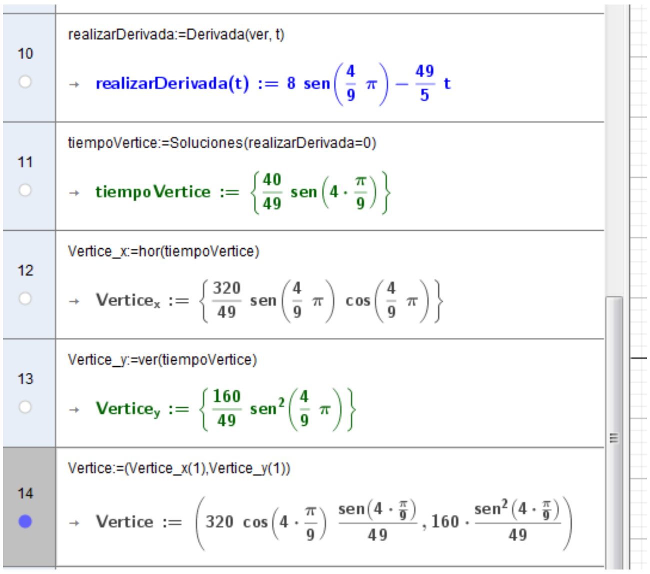
$$Vertice_y := ver(tiempoVertice)$$

Recuerda que para introducir un subíndice su usa la tecla de guión bajo _ seguido de la letra a situar como subíndice.

Los valores $Vertice_x$ y $Vertice_y$ son una lista con un único elemento. Fíjate en la sintaxis de Geogebra para crear un punto donde la primera componente sea el único elemento de la lista $Vertice_x$ y la segunda componente sea el único elemento de la lista $Vertice_y$.

$$Vertice := (Vertice_x(1), Vertice_y(1))$$

Imagen 4: Detalle en CAS de los comandos Derivada y Soluciones para obtener las coordenadas del vértice de la parábola.



Actividad 5

Mostramos en Vista Gráfica el punto Vértice obtenido (situar en azul el icono circular de la línea de CAS).

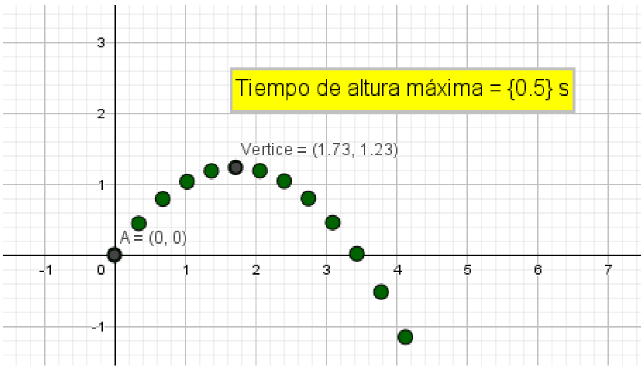
Introducir un cuadro de texto que indique el tiempo que se tarda en alcanzar la altura máxima (en el diálogo del cuadro de texto usar la opción “Objeto” para introducir el valor de la variable tiempoVertice).

Para situar ese cuadro de texto siempre por encima de las coordenadas del vértice, pulsamos con el botón derecho en “Propiedades”, luego en “Posición” y en la ventana “Punto de origen” escribimos:

$$Vertice+(0,1)$$

Con esto conseguimos que la esquina inferior izquierda del cuadro de texto esté situada siempre una unidad vertical por encima de las coordenadas del vértice.

Imagen 5: Cuadro de texto situado sobre el vértice.



Actividad 6

Calculamos el tiempo de alcance máximo, es decir, cuando la parábola de la trayectoria toca el suelo (altura cero).

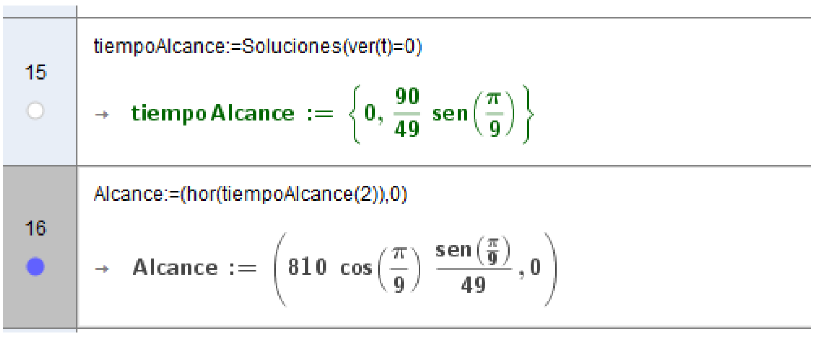
Para ello igualamos la componente vertical a cero y obtenemos las soluciones. Como es una parábola, tendremos dos soluciones. Nos interesa la solución mayor, que se corresponde con el tiempo del alcance máximo del movimiento parabólico.

$$tiempoAlcance:=Soluciones(ver(t)=0)$$

La variable tiempoAlcance vuelve a ser una lista. En esa ocasión de dos elementos. Nos interesa el segundo elemento. Si llevamos ese valor a la ecuación del movimiento horizontal, tendremos la coordenada horizontal del alcance máximo.

$$Alcance:=(hor(tiempoAlcance(2)),0)$$

Imagen 6: Detalle en CAS para obtener tiempo de alcance máximo y coordenadas del alcance.

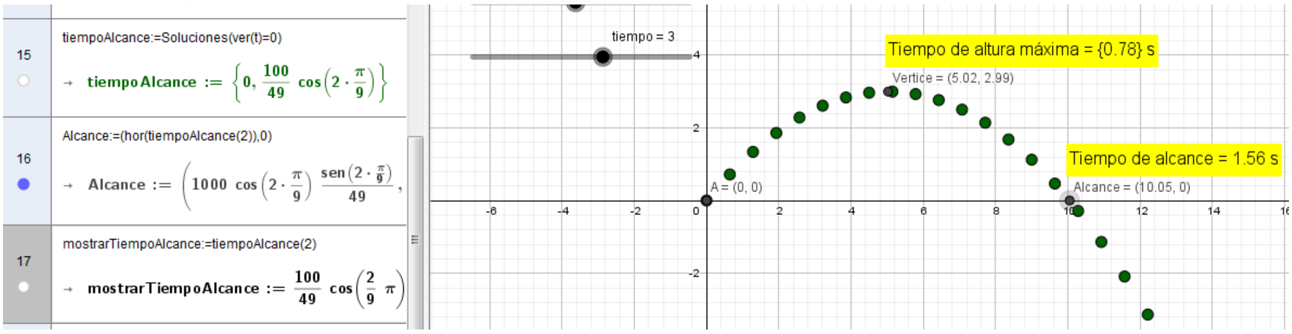


Actividad 7

Finalmente mostramos un cuadro de texto con el tiempo de alcance máximo. Debes seguir los mismos pasos que los realizados en la Actividad 5 para colocar el primer cuadro de texto.

Dejo una cuestión abierta para que la resuelvas tú solo, sin necesidad de darte la solución en este pdf: ¿Cómo mostrar en el cuadro de texto el tiempo del alcance máximo? ¡A pensarlo un poco!

Imagen 7: Detalle en CAS para obtener el tiempo de alcance máximo y mostrarlo en un cuadro de texto



Enlace con resultado final: https://www.geogebra.org/m/ydbvnrgb