Teoría – Tema 2

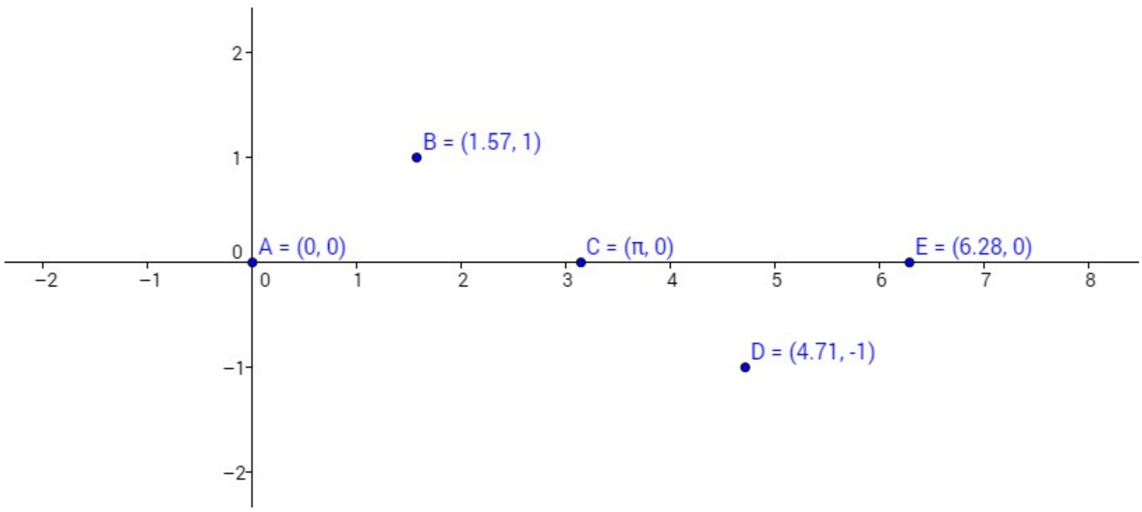
Trigonometría - Gráfica de funciones trigonométricas elementales

sen(x)

Vamos a considerar el valor de la función seno para ángulos pertenecientes al intervalo cerrado $[0,\ 2\pi]$. Conocemos bien el valor del seno para ciertos ángulos característicos en la circunferencia goniométrica (corte de los ejes cartesianos con la circunferencia).

x	sen(x)
0º (0 rad)	0
90º (π/2 rad)	1
180º (π rad)	0
270º (3π/2 rad)	-1
360º (2π rad)	0

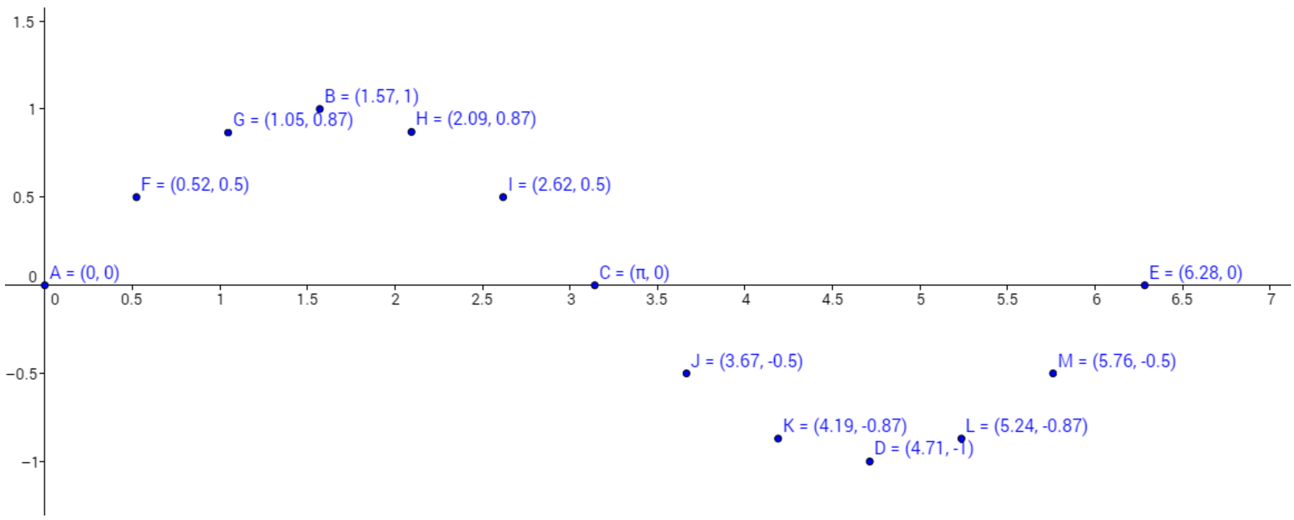
Si representamos estas parejas de valores en unos ejes cartesianos, tendremos representados los valores máximos, mínimos y nulos de la función seno en $[0,\ 2\pi]$.



Esta tabla de valores podemos completarla con otros valores también bien conocidos para la función seno (y que hemos demostrado analíticamente en clase).

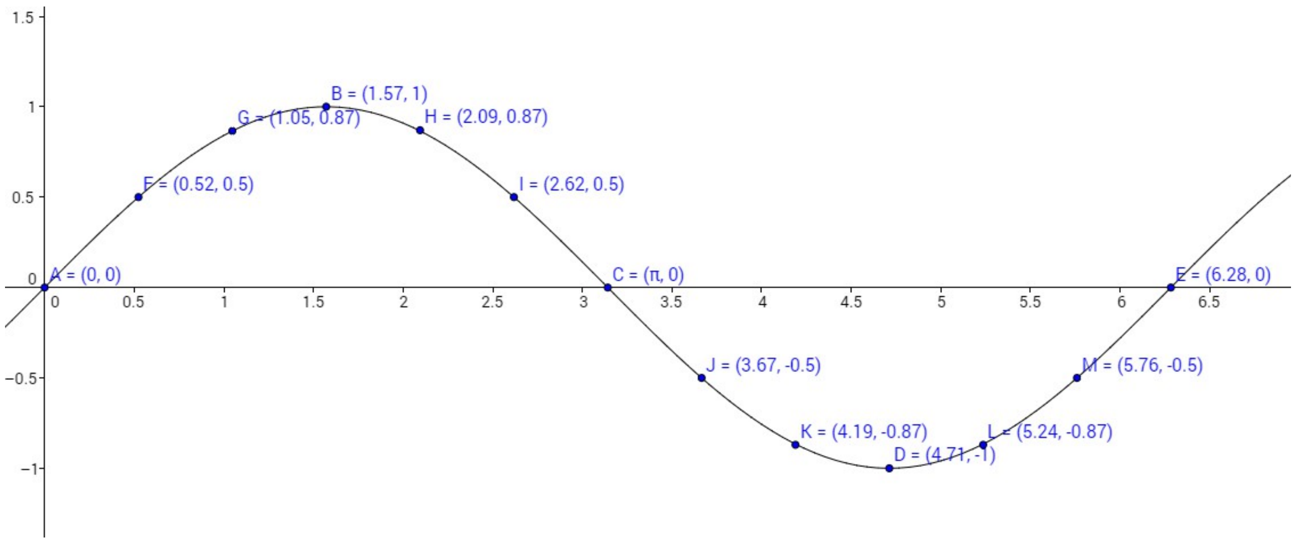
x	sen(x)
30º (π/6 rad)	1/2
60º (π/3 rad)	$\sqrt{3}/2$
120º (2π/3 rad)	$\sqrt{3}/2$
150º (5π/6 rad)	1/2
210º (7π/6 rad)	-1/2
240º (4π/3 rad)	$-\sqrt{3}/2$
300º (5π/3 rad)	$-\sqrt{3}/2$
330º (11π/6 rad)	-1/2

Nuestra gráfica contará con más parejas de valores, y nos permite intuir la forma de nuestra curva.



En el caso ideal de contar con infinita parejas de valores, podríamos reconstruir con total precisión la forma de nuestra curva.

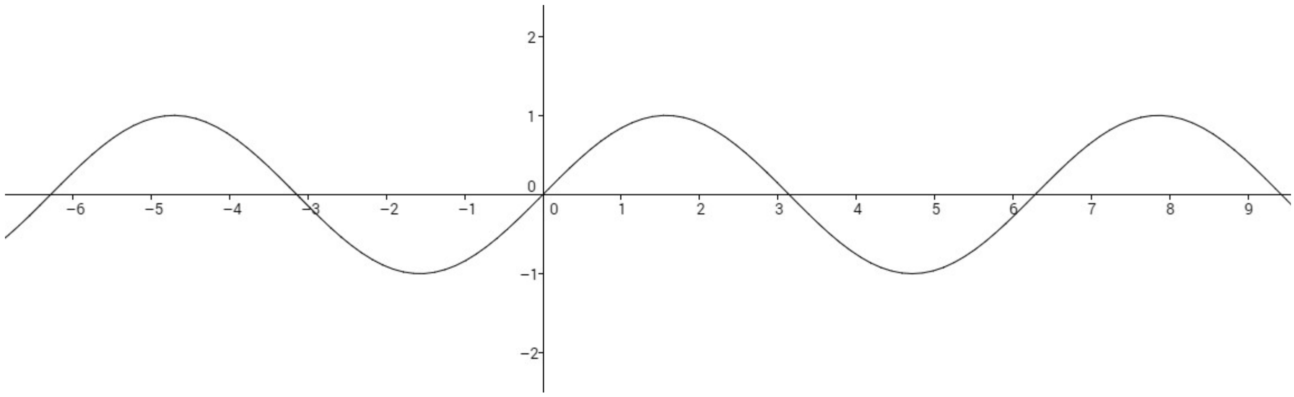
Con GeoGebra podemos pintar nuestra función seno con la instrucción *sin(x)* en la línea de comandos, obteniendo así una trazo continuo en el intervalo $[0,\ 2\pi]$.



Sabemos que los valores de las razones trigonométricas se repiten cada 360º (2π radianes), es decir, cada vez que nuestro ángulo da una vuelta completa alrededor de la circunferencia goniométrica.

Por lo tanto, si conocemos la forma de la curva en el intervalo $[0,\ 2\pi]$, podemos replicarla a lo largo de toda la recta real gracias a su periodicidad de 2π radianes.

$f(x)=sen(x)$



Observando la gráfica completa de sen(x) podemos inferir propiedades importantes de la función seno:

- La función es simétrica respecto a origen (0, 0).

  Es decir, la función seno es impar. Por lo tanto: $sen(-x)=-sen(x)$
- La función está acotada superior e inferiormente. El valor máximo es 1 y el valor mínimo es -1. Trabajando con valor absoluto: $|sen(x)|\leq 1$.

- La función alcanza su valor máximo 1 en los valores …,-3π/2, π/2, 5π/2,... Es decir: $sen(x)=1 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k\,, \quad k\in\mathbb{Z}$.
- La función alcanza su valor mínimo -1 en los valores …,-π/2, 3π/2, 7π/2,... Es decir: $sen(x)=-1 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot k\,, \quad k\in\mathbb{Z}$.
- La función alcanza el valor nulo 0 en los valores …,-π, 0, π, 2π,... Es decir: $sen(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=\pi\cdot k\,, \quad k\in\mathbb{Z}$.
- El dominio de la función seno son todos los reales → $D_f=\mathbb{R}$.
- La imagen de la función seno oscila entre -1 y 1 → $Imagen_f=[-1,1]$

cos(x)

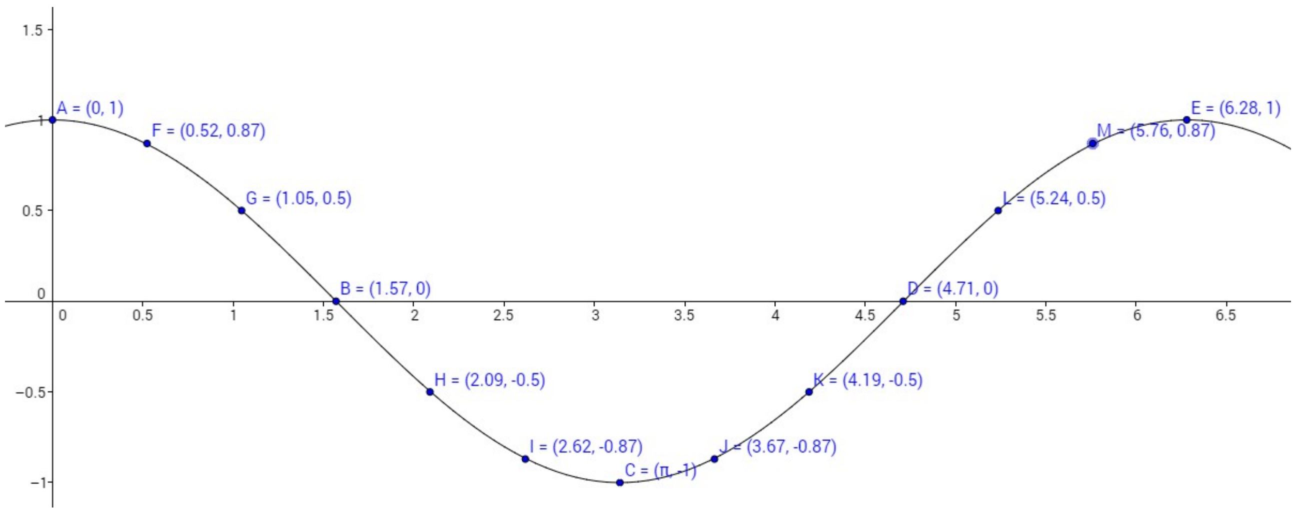
Si repetimos la reflexión anterior para la función coseno, podemos completar la siguiente tabla de valores.

x	cos(x)
0º (0 rad)	1
30º (π/6 rad)	$\sqrt{3}/2$
60º (π/3 rad)	1/2
90º (π/2 rad)	0
120º (2π/3 rad)	-1/2
150º (5π/6 rad)	$-\sqrt{3}/2$
180º (π rad)	-1
210º (7π/6 rad)	$-\sqrt{3}/2$
240º (4π/3 rad)	-1/2
270º (3π/2 rad)	0
300º (5π/3 rad)	1/2
330º (11π/6 rad)	$\sqrt{3}/2$
360º (2π rad)	1

La curva generada por la pareja de valores de la función coseno genera una curva idéntica a la del seno, desplazada lateralmente π/2 radianes (90º). Esta relación la obtuvimos geométricamente al estudiar ángulos complementarios:

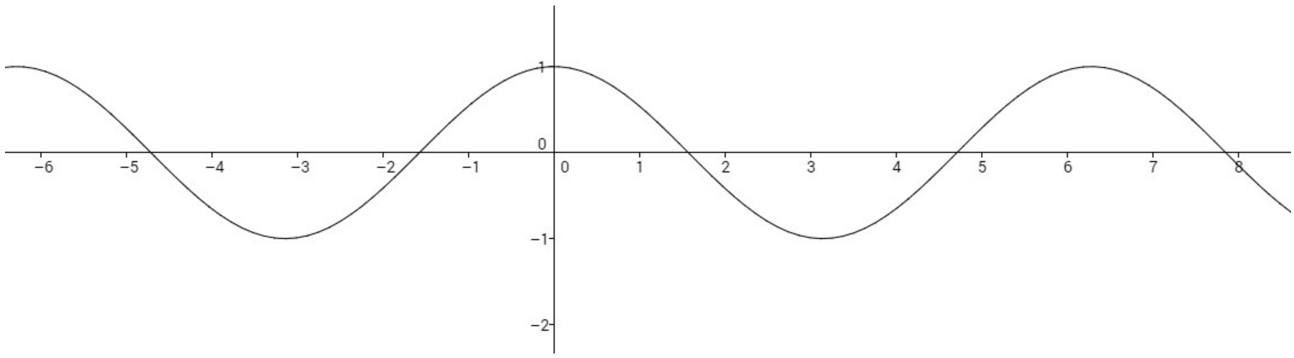
$$si \quad x+y=90^{o} \quad \rightarrow \quad sen(x)=\cos(y) \quad \rightarrow \quad sen(x)=\cos(90^{o}-x)$$

Con Geogebra podemos representar las parejas de valores y la función coseno en el intervalo cerrado $[0,\ 2\pi]$.



Una vez conocida la forma de la gráfica en el intervalo $[0, \ 2\pi]$, y al ser periódica con factor de periodicidad 2π, podemos extrapolar la curva al resto de la recta real.

$f(x)=\cos(x)$



Propiedades importantes de la función coseno:

- La función es simétrica respecto al eje vertical OY.

  Es decir, la función coseno es par.

  Por lo tanto: $\cos(-x)=\cos(x) \rightarrow \cos(90º-x)=\cos(x-90º)$

- La función está acotada superior e inferiormente. El valor máximo es 1 y el valor mínimo es -1. Trabajando con valor absoluto: $|\cos(x)|\leqslant 1$.

- La función alcanza su valor máximo 1 en los valores …,-2π, 0, 2π,... Es decir: $\cos(x)=1 \rightarrow x=2\pi\cdot k, \quad k\in\mathbb{Z}$.

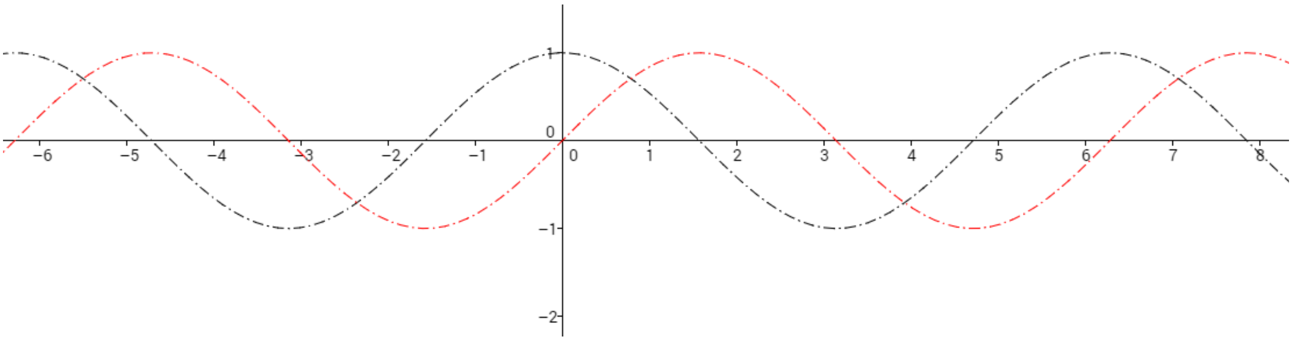
- La función alcanza su valor mínimo -1 en los valores …,-3π, -π, π, 3π,... Es decir: $\cos(x)=-1 \rightarrow x=\pi+2\pi\cdot k, \quad k\in\mathbb{Z}$.

- La función alcanza el valor nulo 0 en los valores …,-π/2, π/2, 3π/2,... Es decir: $\cos(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$.
- El dominio de la función coseno son todos los reales → $D_f=\mathbb{R}$.
- La imagen de la función coseno oscila entre -1 y 1 → $Imagen_f=[-1,1]$.

Finalmente, si representamos sobre los mismos ejes la función seno y la función coseno, podemos apreciar visualmente el desplazamiento de 90º del coseno respecto del seno (o viceversa).

----------- $f(x)=\cos(x)$

----------- $g(x)=sen(x) \quad \rightarrow \quad sen(x)=\cos(\pi/2-x) \quad \rightarrow \quad sen(x)=\cos(x-\pi/2)$



Los puntos de corte de ambas gráficas representan los valores de x que tienen el mismo valor para el seno que para el coseno → $sen(x)=\cos(x) \quad \rightarrow \quad tg(x)=1$.

Es decir, son los puntos donde la función seno y coseno coinciden en módulo y en signo (ambos valores positivos o ambos negativos).

$|tg(x)|=1$ → x = …,-135º, 45º, 225º,... → $x=\frac{\pi}{4}+\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$

tg(x)

La función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno.

$$tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

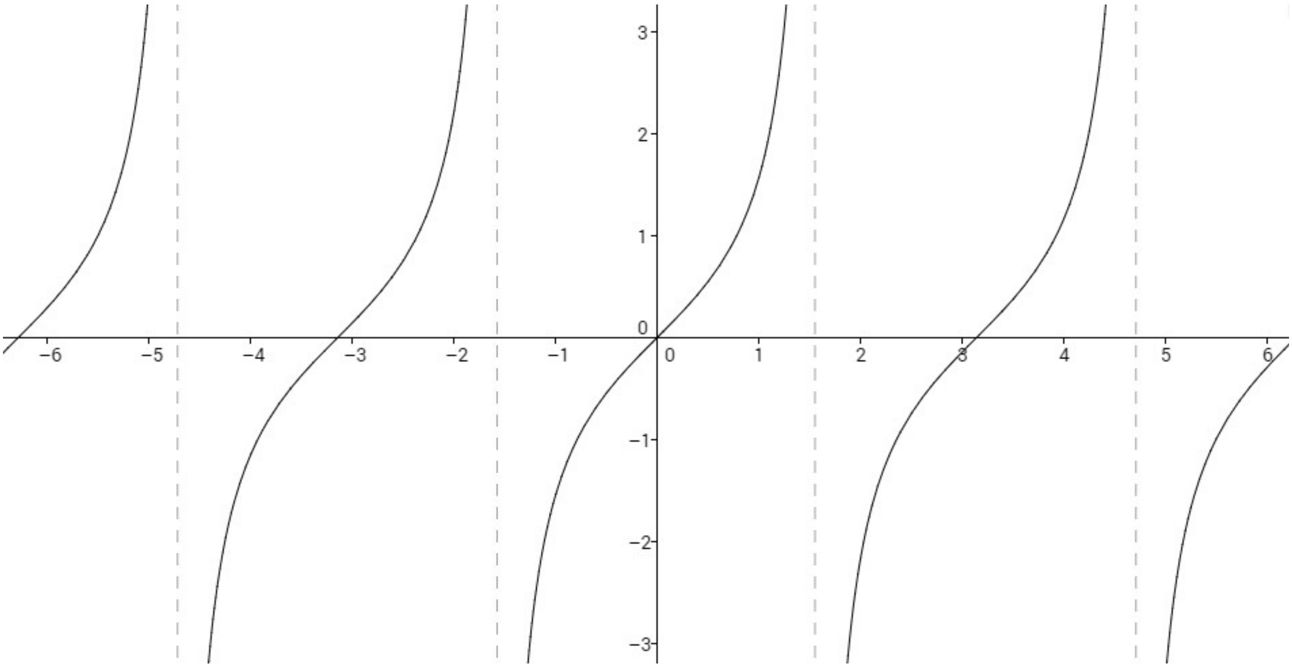
La función seno es continua en toda la recta real, como hemos visto anteriormente. La función coseno también. Al dividir dos funciones, el dominio resultante del cociente es la intersección del dominio del numerador y del dominio del denominador, exceptuando los puntos donde el denominador se anule.

La función coseno se anula en → $\cos(x)=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k, \quad k\in\mathbb{Z}$.

Es decir, con una periodicidad de π radianes encontraremos puntos donde la función no está definida por tender a infinito (debido a que el denominador se anula).

Cada π radianes encontraremos una asíntota vertical: la función tiende a más infinito o menos infinito conforme el valor de x se acerca a los valores $x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k, \quad k\in\mathbb{Z}$.

$f(x)=tg(x)$ (en gris trazamos las asíntotas verticales)



Propiedades importantes de la función tangente:

- La función es simétrica respecto al origen (0, 0).

  Es decir, la función tangente es impar.

  Por lo tanto: $tg(-x)=-tg(x)$
- La función no está acotada superior ni inferiormente.
- El dominio de la función tangente no incluye los puntos donde la función tiende a infinito → $D_f=\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\ \ k\in\mathbb{Z}\}$.
- La imagen de la función tangente recorre todos los valores reales → $Imagen_f=(-\infty,+\infty)$.

Finalmente, si en una única gráfica representamos seno, coseno y tangente, podemos apreciar visualmente los puntos importantes de estas tres funciones trigonométricas elementales.

----------- $f(x)=\cos(x)$

----------- $g(x)=sen(x)$

----------- $h(x)=tg(x)$ (en gris trazamos las asíntotas verticales)