Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Complejos - Hoja 7 - Todos resueltos

Hoja 7. Problema 1

1. Opera y simplifica.

$$\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$$

Expresamos cada número complejo en forma polar.

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i \quad \rightarrow \quad módulo=\sqrt{2+2}=2 \quad , \quad fase=arcotg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=45º \quad \rightarrow \quad 2_{45º}$$

$$\sqrt{3}+i \quad \rightarrow \quad módulo=\sqrt{3+1}=2 \quad , \quad fase=arcotg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30º \quad \rightarrow \quad 2_{30º}$$

Elevamos el numerador al cubo → $(2_{45º})^3=8_{135º}$

Elevamos el denominador al cuadrado → $(2_{30º})^2=4_{60º}$

Dividimos numerador entre denominador → $\frac{8_{135º}}{4_{60º}}=2_{75º}$

Aplicamos raíz cuarta al resultado del cociente → $\sqrt[4]{2_{75º}}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{75º+360º k}{4}}\ ,k=0,1,2,3$

Las cuatro soluciones resultan:

$$(\sqrt[4]{2})_{18,75º} \quad , \quad (\sqrt[4]{2})_{108,75º} \quad , \quad (\sqrt[4]{2})_{198,75º} \quad , \quad (\sqrt[4]{2})_{288,75º}$$

Cada fase con todas la vueltas de 360º que deseemos aplicar.

Hoja 7. Problema 2

2. Calcular el valor de a para que el resultado del siguiente cociente sea un número imaginario puro.

$$\frac{2+ai}{3-i}$$

Multiplico y divido por el conjugado del denominador (recuerda $i^2=-1$).

$$\frac{2+ai}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{6+2i+3ai-a}{9+1}=\frac{6-a+(2+3a)i}{10}=\frac{6-a}{10}+\frac{2+3a}{10}\cdot i$$

Un número imaginario puro no tiene parte real, por lo que igualamos a cero la parte real.

$$\frac{6-a}{10}=0 \quad\rightarrow\quad a=6$$

Hoja 7. Problema 3

3. La suma de las partes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.

Los números complejos son conjugados entre si. Por lo tanto:

$$z_1=a+bi \quad , \quad z_2=a-bi$$

La suma de sus parte reales es igual a 6 → $a+a=6 \rightarrow a=3$

La suma de sus módulos es 10 → $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}=10 \rightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}=10 \rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=5$

En la segunda ecuación llevamos el resultado $a=3 \rightarrow \sqrt{9+b^2}=5$

Elevamos al cuadrado → $9+b^2=25 \rightarrow b=\pm 4$

Los dos números complejos conjugados resultan en forma binómica:

$$z_1=3+4i \quad , \quad z_2=3-4i$$

Y en forma polar:

$$z_1=5_{53,13°} \quad , \quad z_1=5_{306,87°}$$

Cada fase con todas las vueltas de 360º que deseemos aplicar.

Hoja 7. Problema 4

4. Opera y desarrolla la siguiente potencia y expresa el resultado final en notación polar, trigonométrica y binómica.

$(\sqrt{2}-i)^6$

Expreso el número complejo en forma polar.

$\sqrt{2}-i \quad \rightarrow \quad módulo=\sqrt{2+1}=\sqrt{3} \quad , \quad fase=arctg(\frac{-1}{\sqrt{2}})=324,74^o \quad \rightarrow \quad (\sqrt{3})_{324,74^o}$

Lo elevamos a la sexta potencia.

$[(\sqrt{3})_{324,74^o}]^6=27_{1948,44^o}$

Expresamos la fase en el intervalo de 0º a 360º.

$360º\cdot 5=1800º \quad \rightarrow \quad 1948,44^o-1800º=148,44^o \quad \rightarrow \quad 27_{148,44^o}$ → notación polar

$z=27\cdot\cos(148,44^o)+27\cdot sen(148,44^o)\cdot i$ → notación trigonométrica

$z\simeq -23+14,13\cdot i$ → notación binómica

Hoja 7. Problema 5

5. Determinar a **y** b **para que el cociente** $\frac{a+2i}{3+bi}$ **sea igual a** $(\sqrt{2})_{45º}$ **.**

En el cociente, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (recuerda que $i^2=-1$).

$$\frac{a+2i}{3+bi}\cdot\frac{3-bi}{3-bi}=\frac{3a-abi+6i+2b}{9+b^2}=\frac{3a+2b}{9+b^2}+\frac{6-ab}{9+b^2}\cdot i$$

El número complejo en forma polar lo expresamos en forma binómica, con ayuda de la ecuación trigonométrica.

$$(\sqrt{2})_{45º}=\sqrt{2}\cdot\cos(45º)+\sqrt{2}\cdot sen(45º)i=1+i$$

Igualamos parte real con parte real, e imaginaria con imaginaria.

$$\begin{Bmatrix}\frac{3a+2b}{9+b^2}=1\\ \frac{6-ab}{9+b^2}=1\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}3a+2b=9+b^2\\ 6-ab=9+b^2\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}3a+2b=9+b^2\\ -ab=3+b^2\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}3a+2b=9+b^2\\ a=\frac{-3-b^2}{b}\end{Bmatrix}$$

Sustituimos el valor de a de la segunda ecuación del sistema en la primera ecuación.

$$3\cdot\frac{-3-b^2}{b}+2b=9+b^2 \rightarrow -9-3b^2+2b^2=9b+b^3 \rightarrow -9-b^2=9b+b^3$$

$b^3+b^2+9b+9=0$ → aplico Rufinni

	1	1	9	9
-1		-1	0	-9
	1	0	9	0

Es decir → $b^3+b^2+9b+9=0$ → $(b+1)(b^2-9)=0$ → Única solución real → $b=-1$

Si $b=-1$ → $a=\frac{-3-1}{-1}=4$

Hoja 7. Problema 6

6. Resuelve $x^4+16=0$. Escribe las soluciones en notación polar.

$x^4+16=0 \rightarrow x^4=-16$ -->Expresamos -16 como forma polar $\rightarrow$ $-16=(16)_{180º}$

$x^4=(16)_{180º} \rightarrow x=\sqrt[4]{(16)_{180º}}=(\sqrt[4]{16})_{\frac{180º+360º\cdot k}{4}}=2_{\frac{180º+360º\cdot k}{4}}$, $k=0,1,2,3$

Si $k=0 \rightarrow fase=45º$

Si $k=1 \rightarrow fase=135º$

Si $k=2 \rightarrow fase=225º$

Si $k=3 \rightarrow fase=315º$

Hoja 7. Problema 7

7. Sea el afijo $A(4,4)$ perteneciente al cuerpo de los números complejos. ¿Por qué número complejo habrá que multiplicarlo para que el resultado del producto sea el afijo complejo $B(-8\sqrt{3},8)$?

Expresamos ambos complejos en forma polar.

$$A(4,4) \rightarrow 4+4i \rightarrow módulo=\sqrt{32}=4\sqrt{2} \ , \ fase=arcotg(\frac{4}{4})=45º \rightarrow (4\sqrt{2})_{45º}$$

$$B(-8\sqrt{3},8) \rightarrow -8\sqrt{3}+8i \rightarrow módulo=\sqrt{64\cdot 3+64}=16 \ , \ fase=arcotg(\frac{1}{-\sqrt{3}})=-30º$$

$B(-8\sqrt{3},8)$ pertenece al segundo cuadrante $\rightarrow$ $fase=-30º=330º \rightarrow 150º \rightarrow (16)_{150º}$

Expresamos la relación del enunciado.

$$(4\sqrt{2})_{45º}\cdot r_{\alpha}=(16)_{150º} \rightarrow (4\sqrt{2}\cdot r)_{45º+\alpha}=(16)_{150º}$$

Donde r_{α} es el complejo que estamos buscando, en forma polar. Igualamos módulos e igualamos fases.

$$4\sqrt{2}\cdot r=16 \rightarrow r=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$45º+\alpha=150º \rightarrow \alpha=105º$$

Solución $\rightarrow$ $r_{\alpha}=(2\sqrt{2})_{105º+360º k} \ , k\in\mathbb{Z}$

Hoja 7. Problema 8

8. Halla dos números complejos sabiendo que su suma es $1+6i$ y que el cociente de los mismos es un número imaginario puro. Además, la parte imaginaria de uno de los números complejos es igual a uno.

Los dos números complejos son:

$$z_1=a+bi \quad , \quad z_2=c+i$$

Donde hemos considerado la parte imaginaria del segundo número igual a la unidad.

Realizamos la suma de ambos números complejos.

$$z_1+z_2=1+6i \quad \rightarrow \quad (a+c)+(b+1)i=1+6i \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a+c=1 \\ b+1=6 \end{Bmatrix}$$

De la segunda ecuación del sistema obtenemos → $b=5$

Realizamos el cociente, que da lugar a un número imaginario puro.

$$\frac{a+5i}{c+i}\cdot\frac{c-i}{c-i}=\frac{ac-ai+5ci+5}{c^2+1}=\frac{ac+5}{c^2+1}+\frac{5c-a}{c^2+1}i \quad \rightarrow \quad \frac{ac+5}{c^2+1}=0 \quad \rightarrow \quad ac+5=0$$

Podemos formar un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas a y c .

$$\begin{Bmatrix} a+c=1 \\ ac+5=0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} c=1-a \\ ac+5=0 \end{Bmatrix}$$ → Sustituimos el valor de la primera en la segunda.

$$a(1-a)+5=0 \quad \rightarrow \quad a-a^2+5=0 \quad \rightarrow \quad a^2-a-5=0 \quad \rightarrow \quad a=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

Si $a=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad c=1-\frac{1+\sqrt{21}}{2}=\frac{1-\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad z_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2}+5i \quad , \quad z_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}+i$

Si $a=\frac{1-\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad c=1-\frac{1-\sqrt{21}}{2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \rightarrow \quad z_1=\frac{1-\sqrt{21}}{2}+5i \quad , \quad z_2=\frac{1+\sqrt{21}}{2}+i$

Hoja 7. Problema 9

9. Una de las soluciones de la raíz quinta de un número complejo es el afijo $A(1,\sqrt{3})$. Calcula las restantes soluciones de esa raíz quinta, en forma trigonométrica.

Sabemos que las soluciones de una raíz quinta comporten el mismo módulo (en forma polar) y las fases se diferencian en 72º, ya que $\frac{360^o}{5}=72^o$.

$$A(1,\sqrt{3}) \rightarrow 1+\sqrt{3} \rightarrow módulo=\sqrt{1+3}=2 \quad , \quad fase=arcotg(\frac{\sqrt{3}}{1})=60^o$$

$$(2)_{60^o} \rightarrow 2\cdot\cos(60^o)+2\cdot sen(60^o)i$$

El resto de soluciones son:

$$(2)_{60^o+72^o}=(2)_{132^o} \rightarrow 2\cdot\cos(132^o)+2\cdot sen(132^o)i$$
$$(2)_{132^o+72^o}=(2)_{204^o} \rightarrow 2\cdot\cos(204^o)+2\cdot sen(204^o)i$$
$$(2)_{204^o+72^o}=(2)_{276^o} \rightarrow 2\cdot\cos(276^o)+2\cdot sen(276^o)i$$
$$(2)_{276^o+72^o}=(2)_{348^o} \rightarrow 2\cdot\cos(348^o)+2\cdot sen(348^o)i$$

Hoja 7. Problema 10

10. Calcula $\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}$ **.**

Operamos en el numerador y en el denominador, recordando que $i^2=-1$.

$$\frac{(3-i)^2}{i(1+i)}=\frac{9+i^2-6i}{i-1}=\frac{8-6i}{-1+i}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{8-6i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-8-8i+6i+6i^2}{1+1}=\frac{-14-2i}{2}=-7-i$$

Hoja 7. Problema 11

11. Obtener la forma binómica y polar del número complejo $(\sqrt{3},1)$. Obtener también su conjugado y su inverso en forma polar.

$(\sqrt{3},1) \rightarrow \sqrt{3}+i$ → forma binómica

$Módulo=\sqrt{3+1}=2$, $fase=arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})=30º \rightarrow (2)_{30º}$ → forma polar

Conjugado → $\sqrt{3}-i \rightarrow (2)_{330º}$ → forma polar del conjugado

Inverso → $\frac{1}{(2)_{30º}}=\frac{1_{0º}}{(2)_{30º}}=(\frac{1}{2})_{-30º}=(\frac{1}{2})_{330º+360º k}$ $, k\in\mathbb{Z}$ → forma polar del inverso

Hoja 7. Problema 12

12. Obtener z en la ecuación $\frac{z}{1+i}+\frac{z}{i}=2\mathrm{i}$, sabiendo que z es un número complejo.

Sea $z=a+bi$ nuestro número complejo solución. Operamos con los denominadores de la ecuación.

$$\frac{z}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}+\frac{z}{i}\cdot\frac{i}{i}=2\mathrm{i} \rightarrow \frac{z-zi}{1+1}-zi=2\mathrm{i} \rightarrow \frac{z}{2}-\frac{z}{2}i-zi=2i \rightarrow \frac{z}{2}-\left(\frac{z}{2}+z\right)i=2i$$

$$\frac{z}{2}-\frac{3z}{2}i=2i$$

Si $z=a+bi \rightarrow \frac{a+bi}{2}-\frac{3(a+bi)}{2}i=2i \rightarrow \frac{a+bi}{2}-\frac{3ai-3b}{2}=2i$

$$\frac{a+bi-3ai+3b}{2}=2i \rightarrow a+3b+(b-3a)i=4i$$

Tenemos una igualdad de números complejos, por lo que igualamos las partes reales y las partes imaginarias.

$\begin{Bmatrix} a+3b=0 \\ b-3a=4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a=-3b \\ b-3a=4 \end{Bmatrix}$ → Sustituimos el valor de la primera en la segunda

$$b-3(-3b)=4 \rightarrow b+9b=4 \rightarrow b=\frac{2}{5} \rightarrow a=-3\cdot\frac{2}{5}=\frac{-6}{5} \rightarrow z=\frac{-6}{5}+\frac{2}{5}i$$