Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación de la primera evaluación - Hoja 10 - Todos resueltos

Hoja 10. Problema 1

1. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. Debes obtener la representación gráfica de la solución y los vértices que aparecen. Debes indicar si las semirectas y los vértices que limitan la zona solución pertenecen o no a la solución del sistema.

$$\begin{Bmatrix} 5x+y\leq 5 \\ 3x-2y\leq 4 \\ \frac{x}{2}-y>0 \end{Bmatrix}$$

Representamos la recta asociada a cada inecuación, obteniendo un par de punto de la recta y la zona del plano que satisface cada desigualdad.

Desigualdad $5x+y\leq 5$ → Recta $5x+y=5$ → Puntos de la recta $(0,5)$, $(2,-5)$

La zona del plano que contiene al punto $(0,0)$ cumple la desigualdad.

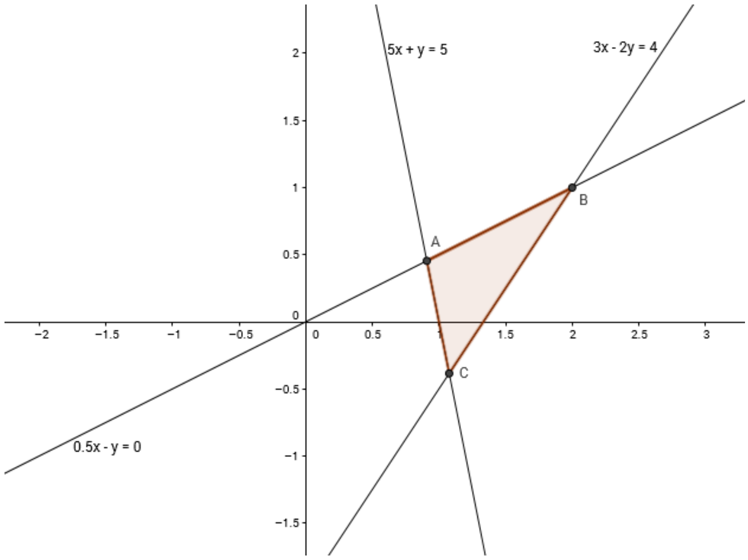
Desigualdad $3x-2y\leq 4$ → Recta $3x-2y=4$ → Puntos de la recta $(0,-2)$, $(2,1)$

La zona del plano que contiene al punto $(0,0)$ cumple la desigualdad.

Desigualdad $\frac{x}{2}-y>0$ → Recta $\frac{x}{2}-y=0$ → Puntos de la recta $(0,0)$, $(2,1)$

La zona del plano que contiene al punto $(5,0)$ cumple la desigualdad.

Representamos las tres rectas sobre los mismo ejes, siendo la solución del sistema de partida la zona del plano delimitada por las rectas. Si se cortan, obtendremos los puntos de corte y decidiremos si estos puntos de corte son solución del sistema de inecuaciones.



El punto A se obtiene como punto de corte de las rectas $5x+y=5$, $\frac{x}{2}-y=0$. Forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, de solución única.

$$\begin{Bmatrix} 5x+y=5 \\ \frac{x}{2}-y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sumamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad \frac{11x}{2}=5 \quad \rightarrow \quad x=\frac{10}{11} \quad \rightarrow \quad y=\frac{5}{11}$$

El punto B se obtiene como punto de corte de las rectas $3x-2y=4$, $\frac{x}{2}-y=0$. Forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, de solución única.

$$\begin{Bmatrix} 3x-2y=4 \\ \frac{x}{2}-y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3x-2y=4 \\ x-2y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow \quad 2x=4 \quad \rightarrow \quad x=2 \quad \rightarrow \quad y=1$$

El punto C se obtiene como punto de corte de las rectas $5x+y=5$, $3x-2y=4$. Forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, de solución única.

$$\begin{Bmatrix} 3x-2y=4 \\ 5x+y=5 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3x-2y=4 \\ 10x+2y=10 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sumamos} \rightarrow \quad 13x=14 \quad \rightarrow \quad x=\frac{14}{13} \quad \rightarrow \quad y=\frac{-5}{13}$$

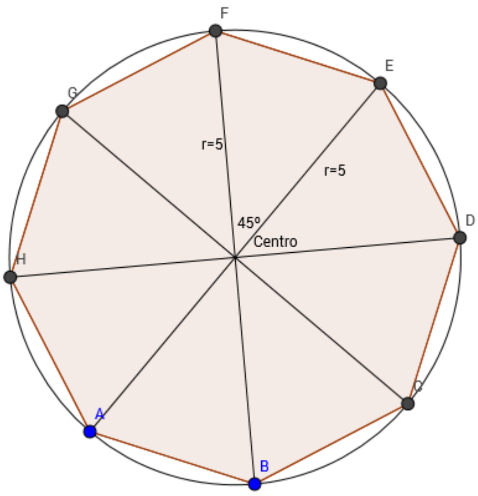
El vértice $C(\frac{14}{13},-\frac{5}{13})$ sí pertenece a la solución, ya que es intersección de dos rectas que cuya desigualdad asociada incluye el signo igual.

Los puntos $A(\frac{10}{11},\frac{5}{11})$ y $B(2,1)$ no pertenecen a la solución, porque al menos una de las rectas que lo forman tienen asociada una desigualdad sin el signo igual.

Por idéntica razón, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ pertenecen a la solución, excluyendo como ya hemos razonado los vértices A y B.

Hoja 10. Problema 2

2. Cálcula el área y el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.



El octógono regular está formado por 8 triángulos isósceles iguales, donde dos de sus lados coinciden con el radio de la circunferencia circunscrita.

En el triángulo de vértices $\overline{CentroFE}$, podemos obtener la longitud del segmento $\overline{FE}$ por el teorema del coseno.

$$(\overline{FE})^2=5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos(45º) \rightarrow (\overline{FE})^2=50-50\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\overline{FE})^2=14{,}64$$

$$\overline{FE}=3{,}83\,cm$$

Con el valor de un lado del octógono regular, su perímetro resulta ocho veces el lado.

$$Perímetro=8\cdot 3{,}83=30{,}64\,cm$$

El área del triángulo $\overline{CentroFE}$ podemos obtenerla como:

$$A_{triángulo}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CentroF}\cdot\overline{CentroE}\cdot sen(45º)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{25\sqrt{2}}{4}$$

Y el área del octógono resulta → $A_{octógono}=8\cdot A_{triángulo}=50\sqrt{2}\,cm^2$

Hoja 10. Problema 3

3. Opera y simplifica $\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$ **.**

Ver problema 1 resuelto de http://danipartal.net/pdf/1bachTema3Hoja7.pdf

Hoja 10. Problema 4

4. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51,5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

Ver problema 1resuelto de http://danipartal.net/pdf/2bachTema6Hoja12.pdf

Hoja 10. Problema 5

5. Resuelve $2\cdot tg(x)-3\cdot cotg(x)-1=0$ **.**

$$2\cdot tg(x)-3\cdot cotg(x)-1=0 \;\rightarrow\; 2\cdot tg(x)-\frac{3}{tg(x)}-1=0 \;\rightarrow\; \frac{2\cdot tg^2(x)-3-tg(x)}{tg(x)}=0$$

$$2\cdot tg^2(x)-tg(x)-3=0 \;\rightarrow\; tg(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm 5}{4} \;\rightarrow\; tg(x)=\frac{3}{2}\;,\; tg(x)=-1$$

Si $tg(x)=\frac{3}{2} \;\rightarrow\; x=56{,}31^o+360^o k\,,\, k\in\mathbb{R}$, $x=236{,}31^o+360^o k\,,\, k\in\mathbb{R}$

Si $tg(x)=-1 \;\rightarrow\; x=135^o+360^o k\,,\, k\in\mathbb{R}$, $x=315^o+360^o k\,,\, k\in\mathbb{R}$

Hoja 10. Problema 6

6. Calcular todas las raíces de la ecuación $x^6+32=0$ **.**

$$x^6+32=0 \quad \rightarrow \quad x^6=-32 \quad \rightarrow \quad x^6=32_{180º}$$

Donde hemos utilizado que un número real negativo se encuentra sobre el semieje negativo real, por lo que su fase (en forma polar) es 180º.

$$x=(\sqrt[6]{32})_{\frac{180º+360º k}{6}, k=0,1,2,3,4,5}$$

$$x=(\sqrt[6]{32})_{30º} \quad , \quad x=(\sqrt[6]{32})_{90º} \quad , \quad x=(\sqrt[6]{32})_{150º} \quad , \quad x=(\sqrt[6]{32})_{210º} \quad , \quad x=(\sqrt[6]{32})_{270º} \quad , \quad x=(\sqrt[6]{32})_{330º}$$

Donde podemos aplicar cualquier número de vueltas de 360º a las fases.

Hoja 10. Problema 7

7. En un estudio de mercado, se eligen tres productos, A, B y C y cuatro tiendas. En la primera tienda, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4.25 euros. En la segunda tienda, 2 unidades de A y 3 de C valen 8.25 euros más que una unidad de B. En la tercera tienda, una unidad de A y 2 de C valen 4 euros más que 2 unidades de B y, en la cuarta tienda, una unidad de B vale 1.25 euros menos que una de C. ¿Tienen A, B y C el mismo precio en las cuatro tiendas o no?

Si la respuesta es no, justifique por qué y si la respuesta es sí, diga cuál es ese precio.

Ver problema 1 resuelto de http://danipartal.net/pdf/2bachTema6Hoja11.pdf