

## Problemas – Tema 5

### Solución a problemas de vectores - Hoja 3 - Problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6

#### Hoja 3. Problema 1

#### Resuelto por Cristina Sola (enero 2016)

Expresa el vector  $\vec{u}=(0,8)$  del espacio vectorial  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  como combinación lineal de los vectores  $\vec{v}=(3,-5)$  ,  $\vec{w}=(6,-2)$  .

$$(0,8)=a(3,-5)+b(6,-2)$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{cases} 0=3a+6b \\ 8=-5a-2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0=3a+6b \\ 24=-15a-6b \end{cases} \rightarrow \text{Sumamos} \rightarrow 24=-12a \rightarrow a=-2 \text{ , } b=1$$

En consecuencia  $\rightarrow (0,8)=-2(3,-5)+(6,-2)$

## Hoja 3. Problema 2

### Resuelto por Pablo Rogríguez (febrero 2016)

2. Dados los vectores  $\vec{u}=(2,0)$  ,  $\vec{v}=(1,2)$  del espacio vectorial  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  , demuestra que forman un sistema generador. Expresa  $\vec{w}=(4,-4)$  como combinación lineal del sistema generador.

$$(x, y) = a(2,0) + b(1,2) \rightarrow (x, y) = (2a+b, 2b)$$

Igualando componentes obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{cases} x = 2a + b \\ y = 2b \end{cases} \rightarrow \text{De la segunda ecuación} \rightarrow b = \frac{y}{2} \rightarrow \text{De la primera} \rightarrow a = \frac{2x - y}{4}$$

Podemos expresar  $a, b$  en función de las componentes del vector arbitrario  $(x, y)$  . Por lo tanto, sí forman sistema generador.

Para el vector  $\vec{w}=(4,-4)$  tendremos:

$$a = \frac{2x - y}{4} \rightarrow a = \frac{2 \cdot 4 + 4}{4} = 3$$

$$b = \frac{y}{2} \rightarrow b = \frac{-4}{2} = -2$$

Es decir  $\rightarrow (4, -4) = 3(2,0) - 2(1,2)$

## Hoja 3. Problema 3

### Resuelto por Juan Luís Pérez Valero (febrero 2015)

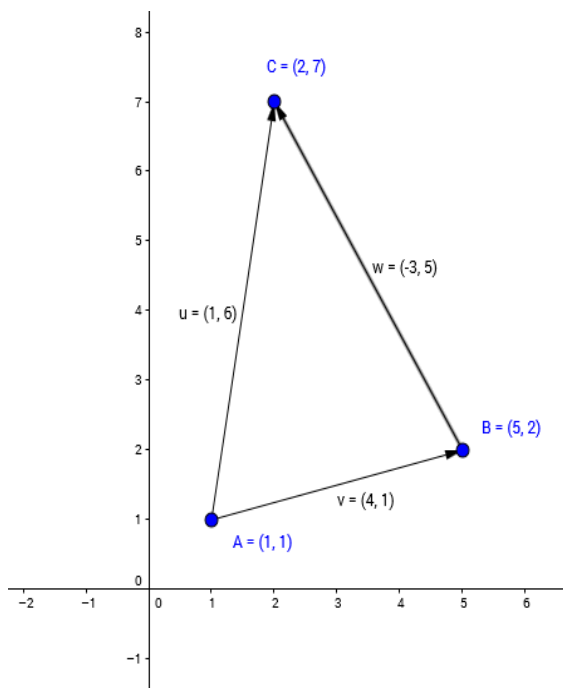
3. Dados los puntos en el plano  $A(1,1)$ ,  $B(5,2)$ ,  $C(2,7)$  represéntalos gráficamente y halla las coordenadas de los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BC}$ .

Para hallar un vector a partir de dos puntos, restamos las coordenadas x e y correspondientes (final menos inicial)

$$\vec{AB} = (5-1, 2-1) = (4, 1)$$

$$\vec{AC} = (2-1, 7-1) = (1, 6)$$

$$\vec{BC} = (2-5, 7-2) = (-3, 5)$$



## Hoja 3. Problema 4

4. Dados los vectores  $\vec{u}=(3,4)$  ,  $\vec{v}=(-2,5)$  ,  $\vec{w}=(-4,3)$  .

a) Normalizarlos.

b) Hallar el producto escalar  $\vec{u}\cdot\vec{v}$  ,  $\vec{u}\cdot\vec{w}$  .

c) ¿Qué ángulo forman los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  , y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  ?

$$a) \quad |\vec{u}|=\sqrt{9+16}=5 \rightarrow \hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29} \rightarrow \hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{16+9}=5 \rightarrow \hat{w}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$b) \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=(3,4)\cdot(-2,5)=3\cdot(-2)+4\cdot5=14$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=(3,4)\cdot(-4,3)=3\cdot(-4)+4\cdot3=0$$

$$c) \quad \text{ángulo}(\vec{u}, \vec{v})=\arccos\left(\frac{u_x v_x + u_y v_y}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)=\arccos\left(\frac{14}{5\sqrt{29}}\right)=58,67^\circ$$

$$\text{ángulo}(\vec{u}, \vec{w})=\arccos\left(\frac{u_x w_x + u_y w_y}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)=\arccos(0)=90^\circ$$

## ■ Hoja 3. Problema 5

5. Calcula el ángulo que forman  $\vec{u}=(2\cdot\sqrt{2},-2)$  y  $\vec{v}=(\sqrt{2},-1)$  .

Tenemos dos definiciones del producto escalar.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x v_x+u_y v_y=2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+(-2)(-1)=4+2=6$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\alpha)=\sqrt{8+4}\cdot\sqrt{2+1}\cos(\alpha)=\sqrt{36}\cos(\alpha)=6\cos(\alpha)$$

Igualamos y podemos obtener el ángulo.

$$6=6\cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha)=1 \rightarrow \alpha=0^\circ$$

## Hoja 3. Problema 6

### Resuelto por Javier Rodríguez Estella (Febrero 2016)

6. Calcula el valor de  $m$  para que  $\vec{u} = (m, 5)$  tenga por módulo 13 .

$$|\vec{u}| = 13 \rightarrow \sqrt{m^2 + 25} = 13 \rightarrow m^2 + 25 = 169 \rightarrow m^2 = 144 \rightarrow m = \pm 12$$