Problemas – Tema 5

Solución a problemas de vectores - Hoja 6 - Todos resueltos

Hoja 6. Problema 1

1. Calcula a **para que el conjunto de vectores** $\vec{u}=(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$ **y** $\vec{v}=(2a,\frac{3a}{2})$ **sea una base ortonormal.**

Una base ortonormal en dos dimensiones está formada por dos vectores unitarios y perpendiculares entre si.

El primer vector es de módulo unidad → $|\vec{u}|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$

El segundo vector también debe ser unitario → $|\vec{v}|=\sqrt{4a^2+\frac{9a^2}{4}}=\sqrt{\frac{25a^2}{4}}=1 \rightarrow a=\pm\frac{2}{5}$

Para comprobar que son perpendiculares, vemos si su producto escalar se anula:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{6a}{5}-\frac{6a}{5}=0$$

Es decir, el producto escalar se anula independientemente del valor de a . Tenemos una base ortonormal para $a=\pm\frac{2}{5}$

Hoja 6. Problema 2

2. a) Expresa $\vec{u}=(-3,5)$ como combinación lineal de $\vec{v}=(4,6)$ y $\vec{w}=(1,-4)$.

b) Demuestra analíticamente que los vectores $\vec{u}=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$, $\vec{v}=(2,3,-1)$ y $\vec{t}=(1,0,-1)$ no forman una sistema generador en V^3 .

a) $\vec{u}=a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{w} \rightarrow (-3,5)=a\cdot(4,6)+b\cdot(1,-4) \rightarrow (-3,5)=(4a+b,6a-4b)$

Igualamos componentes → $\begin{Bmatrix} -3=4a+b \\ 5=6a-4b \end{Bmatrix} \rightarrow a=\frac{-7}{22}$, $b=\frac{-19}{11}$

b) Si no forman un sistema generador, el conjunto de vectores no puede representar como combinación lineal de ellos mismos un vector arbitrario (x,y,z) .

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=(x,y,z)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{a}{2}+2b+c=x \\ \frac{3}{2}a+3b=y \\ -b-c=z \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a+4b+2c=2x \\ 3a+6b=2y \\ -b-c=z \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2x \\ 3 & 6 & 0 & 2y \\ 0 & -1 & -1 & z \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-3F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2x \\ 0 & -6 & -6 & 2y-6x \\ 0 & -1 & -1 & z \end{array}\right) \rightarrow F'_3=6F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 2x \\ 0 & -6 & -6 & 2y-6x \\ 0 & 0 & 0 & 6z-2y+6x \end{array}\right)$$

Llegamos a un absurdo, ya que F_3 indica que los valores del vector arbitrario deben cumplir la relación $6z-2y+6x=0$ y esto no se cumple para cualquier valor arbitrario de (x,y,z) .

Por ejemplo $(1,0,0) \rightarrow 6\cdot0-2\cdot0+6\cdot1=0 \rightarrow 6=0$ → Absurdo matemático → No forman un sistema generador.

Hoja 6. Problema 3

3. a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ que hacen linealmente independientes los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,k+1,1)$, $\vec{w}=(1,1,k+1)$.

b) Para $k=2$, demostrar que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

a) Son linealmente independientes si el siguiente sistema tiene solución única $(0,0,0)$.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=\vec{0}$$

$$\begin{Bmatrix} a+b+c=0 \\ a+(k+1)b+c=0 \\ a+b+(k+1)c=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3=F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- $k=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → S.C.I. → Infinitas soluciones → 3 incógnitas y 1 ecuación → 2 parámetros libres → Linealmente dependientes.
- $k\neq 0$ → S.C.D. → Solución única $a=0$, $b=0$, $c=0$ → Linealmente independientes.

b) Para $k=2$ debemos demostrar que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

$\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,3,1)$, $\vec{w}=(1,1,3)$

Realizamos cada término de la igualdad y comprobamos que coinciden:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(1,1,1)\cdot[(1,3,1)+(1,1,3)]=(1,1,1)\cdot(2,4,4)=1\cdot2+1\cdot4+1\cdot4=10$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=(1,1,1)\cdot(1,3,1)+(1,1,1)\cdot(1,1,3)=1\cdot1+1\cdot3+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1+1\cdot3=1+3+1+1+1+3=10$$

Hoja 6. Problema 4

Las siguientes afirmaciones son verdaderas. Pon un ejemplo que demuestre analíticamente cada afirmación y resolverlo.

a) Tres vectores en V^2 que forman un sistema generador no forman una base.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en V^2 y tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma $(\vec{u}+\vec{v})$ y diferencia $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares.

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en V^2 , verifican $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

a) Tres vectores en V^2 que forman un sistema generador no forman una base.

Sabemos que, en dos dimensiones, todas las bases son de dos vectores. Para una mayor número de vectores, obligatoriamente, uno de los vectores será combinación lineal de los otros dos y ya no formarán base.

Por ejemplo: $\vec{u}=(1,0)$, $\vec{v}=(0,1)$, $\vec{w}=(2,0)$ son un sistema generador. Demostrémoslo:

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=(x,y)$$

$\begin{Bmatrix} a+2c=x \\ b=y \end{Bmatrix}$ → Tendremos un parámetro libre: por ejemplo $c=\lambda$

De la segunda ecuación: $b=y$

Y en la primera: $a+2\lambda=x \rightarrow a=x-2\lambda$

Por lo tanto, podemos expresar los parámetros a,b,c en función de las componentes del vector arbitrario (x,y) → Forman un sistema generador.

Pero no una base. Comprobemos que el siguiente sistema no tiene solución única trivial $(0,0,0)$.

$$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}=(0,0)$$

$\begin{Bmatrix} a+2c=0 \\ b=0 \end{Bmatrix}$ → Tendremos un parámetro libre: por ejemplo $c=\lambda \rightarrow b=0 \rightarrow$

$\rightarrow a=x-2\lambda$

Como el parámetro λ puede tomar cualquier valor, tendremos infinitas soluciones válidas → S.C.I. → no forman una base.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en V^2 y tienen el mismo módulo, entonces los vectores suma $(\vec{u}+\vec{v})$ y diferencia $(\vec{u}-\vec{v})$ son perpendiculares.

Por ejemplo: $\vec{u}=(3,4)$, $\vec{v}=(4,3)$ $\rightarrow$ Ambos son de módulo 5 .

$$(\vec{u}+\vec{v})=(7,7)$$
$$(\vec{u}-\vec{v})=(-1,1)$$

Hacemos el producto escalar. Y si es nulo, indica que son perpendiculares (ángulo 90º).

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=(7,7)\cdot(-1,1)=-7+7=0$$

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en V^2 , verifican $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

Planteamos los siguientes vectores ortogonales (perpendiculares), aprovechando los resultados del apartado anterior.

$$\vec{u}=(7,7)$$
$$\vec{v}=(-1,1)$$

Debemos demostrar la igualdad $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$. Operamos en cada término y comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2=|(7,7)+(-1,1)|^2=|(6,8)|^2=(\sqrt{36+64})^2=36+64=100$$
$$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=|(7,7)|^2+|(-1,1)|^2=(\sqrt{49+49})^2+(\sqrt{1+1})^2=98+2=100$$