Teoría – Tema 5

Producto escalar. Ángulo entre vectores

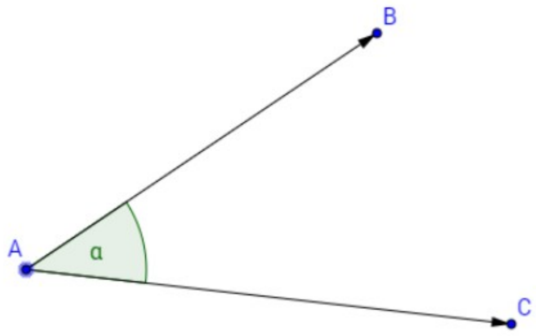
Índice de contenido

Ángulo de dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, si elegimos un origen común para ambos, se llama ángulo de dos vectores al **menor de los ángulos que forman**.

Este ángulo, como ya sabemos, cumple el siguiente convenio: positivo si avanzamos en sentido antihorario, y negativo en sentido horario.

Ángulo α *formado por dos vectores arbitarios*



Si los vectores son paralelos, el ángulo que formarán al situarlos en un origen común será de 0^o . Y si sin antiparalelos, el ángulo será de 180^o .

Ejemplo de vectores paralelos y antiparalelos

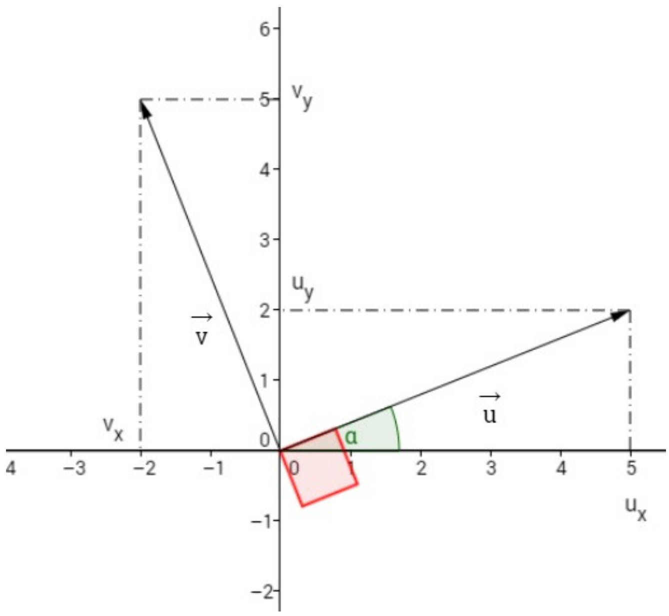
Dos vectores perpendiculares forman 90^o entre si. Profundizemos más en este caso particular para dos dimensiones.

Sea los vectores arbitrarios $\vec{u}=(u_x, u_y)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y)$. Cada uno forma, con el semieje positivo horizontal, un ángulo α y un ángulo β respectivamente. Si son perpendiculares, cumplen la relación:

$$\beta-\alpha=90^o \quad \rightarrow \quad \beta=\alpha+90^o$$

Representemos ambos vectores perpendiculares en el plano bidimensional.

Vectores perpendiculares entre si



En el primer vector la tangente del ángulo α , por definición, resulta:

$$tg(\alpha)=\frac{u_y}{u_x}$$

En el segundo vector, el ángulo $\beta=\alpha+90^o$ resulta:

$$tg(\beta)=\frac{v_y}{v_x}$$

Al diferenciarse los ángulos en 90^o se cumplen las relaciones:

$$u_x=v_y \quad , \quad u_y=-v_x \quad \rightarrow \quad tg(\beta)=tg(\alpha+90^o)=\frac{u_x}{-u_y}$$

$$tg(\alpha)\cdot tg(\beta)=\frac{u_y}{u_x}\cdot\frac{u_x}{-u_y} \quad \rightarrow \quad tg(\alpha)\cdot tg(\beta)=-1$$

Es decir, **el producto de las tangentes de los ángulos de dos vectores perpendiculares es igual a** -1 .

Más allá de la relación numérica obtenida, podemos concluir otro resultado muy práctico. **Un vector será perpendicular a otro vector dado si sus componentes horizontal y vertical están permutadas de posición y con el signo cambiado en una de sus componentes, respecto al vector de partida**.

Un ejemplo de esta última afirmación: el vector $\vec{u}=(5,2)$ es perpendicular al vector $\vec{v}=(-2,5)$ y al vector $\vec{w}=(2,-5)$.

Producto escalar de dos vectores

Se llama producto escalar de dos vectores no nulos, al número real resultante de multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$$

Importante: **el resultado del producto escalar es un número real**, no un vector.

Este producto escalar cumple las siguientes propiedades:

- **Propiedad conmutativa** → $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

  Demostremos esta propiedad, recordando que si α es el ángulo que forma en sentido antihorario $\vec{u}$ con $\vec{v}$, diremos que $-\alpha$ es el ángulo que forma en sentido horario $\vec{v}$ con $\vec{u}$.

  $$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$$
  $$\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(-\alpha)=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)$$

  Donde hemos aplicado que la función coseno es una función par. Y como el producto de número reales es conmutativo, podemos igualar:

  $$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)$$

- **Propiedad asociativa mixta** → $(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

  Demostremos esta propiedad, considerando los siguientes casos:

  Si $\lambda=0$ → $0=0$ → se cumple la igualdad

  Si $\lambda>0$ → $(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=|\lambda\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=|\lambda|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$ → Y como el módulo de un número positivo es ese mismo número llegamos al resultado final que demuestra la igualdad → $|\lambda|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=\lambda\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$

  Si $\lambda<0$ --> $(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=|\lambda\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(180º-\alpha)$ → Ya que el signo negativo de λ hace que el vector $\vec{u}$ cambie de sentido, por lo que cambia el ángulo que forman los dos vectores. Recordamos que el coseno de un ángulo cambia de signo si sumamos 180º a ese ángulo. Y recordamos que el módulo de un número negativo es ese número cambiado de signo. De esta forma obtenemos la siguiente igualdad → $|\lambda\cdot\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(180^{\circ}-\alpha)=|\lambda|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot(-\cos(\alpha))=\lambda\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$

- **Propiedad distributiva** → $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

- **Propiedad positiva** → $\vec{u}\cdot\vec{u}>0$ si $\vec{u}=\vec{0}$

  El producto escalar de cualquier vector no nulo por si mismo, es un número positivo.

  Demostración → $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(0^{\circ})=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|=|\vec{u}|^2>0$ → Como el vector no es nulo, su módulo es positivo; y el cuadrado de un número no nulo siempre es positivo.

Obtener ángulo formado por dos vectores a partir de su producto escalar

De la definición de producto escalar podemos obtener una expresión analítica para el vector que forman dos vectores.

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \alpha=arcocos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

Si $\alpha=90^{o}$ $\rightarrow$ los vectores serán perpendiculares. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean perpendiculares es que su producto escalar sea 0 .

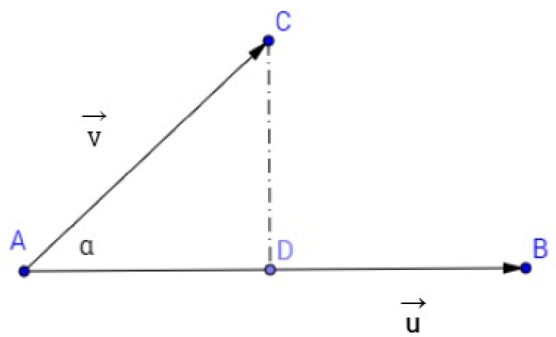
Condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean perpendiculares

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares ==> $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(90^{o})$ ==> $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Si $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=0$ ==> $\cos(\alpha)=0$ ==> $\alpha=90^{o}$ ==> $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares

El producto escalar de dos vectores también podemos verlo como el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)=|\vec{u}|\cdot(\textit{proyección de } \vec{v} \textit{ sobre } \vec{u})$$



Expresión analítica del producto escalar de dos vectores

Sean los vectores arbitrarios $\vec{u}=(u_x,u_y)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y)$, expresados como combinación lineal de la base canónica ortonormal $\hat{i}=(1,0)$ y $\hat{j}=(0,1)$.

$$\vec{u}=u_x\cdot\hat{i}+u_y\cdot\hat{j}$$
$$\vec{v}=v_x\cdot\hat{i}+v_y\cdot\hat{j}$$

Si realizamos el producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_x\cdot\hat{i}+u_y\cdot\hat{j})\cdot(v_x\cdot\hat{i}+v_y\cdot\hat{j})=u_x\cdot v_x\cdot\hat{i}\cdot\hat{i}+u_x\cdot v_y\cdot\hat{i}\cdot\hat{j}+u_y\cdot v_x\cdot\hat{j}\cdot\hat{i}+u_y\cdot v_y\cdot\hat{j}\cdot\hat{j}$$

Donde recordamos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo. Es decir: $\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{i}=0$. Y el producto escalar de dos vectores unitarios paralelos es igual a la unidad. Es decir: $\hat{i}\cdot\hat{i}=1\cdot1\cdot\cos(0^{o})=1$, $\hat{j}\cdot\hat{j}=1\cdot1\cdot\cos(0^{o})=1$.

Con estos resultados, la expresión anterior del producto escalar queda:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$$

Expresión analítica del producto escalar en dos dimensiones

El producto escalar de dos vectores es el número real resultante de sumar el producto de las coordenadas horizontales y el producto de las coordenadas verticales de los vectores.

Por lo que el ángulo formado por dos vectores arbitrarios podemos expresarlo de la forma:

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$

Si generalizamos el razonamiento para vectores en tres dimensiones, tendremos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z \quad\rightarrow\quad \cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$