Teoría – Tema 6

Ecuaciones de la recta

Índice de contenido

Base canónica en dos dimensiones como sistema referencial

Vamos a trabajar en dos dimensiones con un sistema cartesiano de representación, formado por dos ejes perpendiculares entre si: eje horizontal o de abscisas, y eje vertical o de ordenadas.

El punto de corte de ambos ejes será el origen del sistema de referencia $O(0,0)$.

El eje horizontal, hacia la derecha del origen del sistema de referencia, indica valores positivos. A la izquierda, indica valores negativos.

El eje vertical, por encima del origen del sistema de referencia, marca valores positivos. Por debajo, valores negativos.

En cada eje vamos a definir un vector unitario (módulo unidad), paralelo al eje y apuntando hacia el sentido positivo de cada eje.

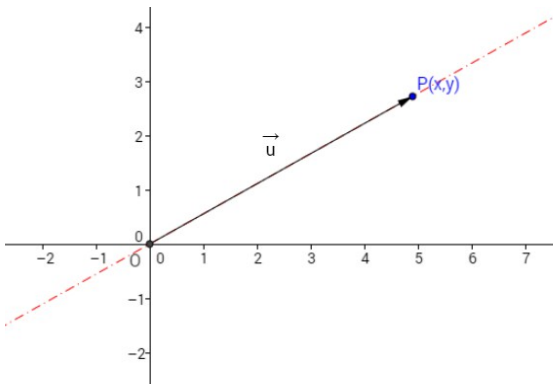
$$\hat{i}=(1,0)$$
$$\hat{j}=(0,1)$$

Ambos vectores, como ya sabemos, son linealmente independientes. Además, forman un sistema generador en dos dimensiones. Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{\hat{i},\hat{j}\}$ forma una base en el plano bidimensional.

Ambos vectores unitarios son perpendiculares entre si, por lo que la base $\{\hat{i},\hat{j}\}$ es ortogonal. Y el módulo de cada vector es 1 , por lo que la base $\{\hat{i},\hat{j}\}$ también es ortonormal.

Cualquier vector con inicio el origen del sistema de referencia $O(0,0)$ y fin el punto arbitrario $P(x,y)$, tendrá como representante canónico el vector $\vec{u}$:

$$\vec{OP}=\vec{u}=(u_x,u_y)$$



Y este vector es fácilmente representable en función de la base canónica:

$$\vec{u}=(u_x, u_y)=u_x(1,0)+u_y(0,1)=u_x\cdot\hat{i}+u_y\cdot\hat{j}$$

Como muestra la gráfica anterior, el vector $\vec{u}$ marca la dirección de una recta (representada en la imagen anterior en trazo discontinuo de color rojo). Es decir, **una recta no es más que la prolongación infinita de un vector a lo largo de toda su dirección**.

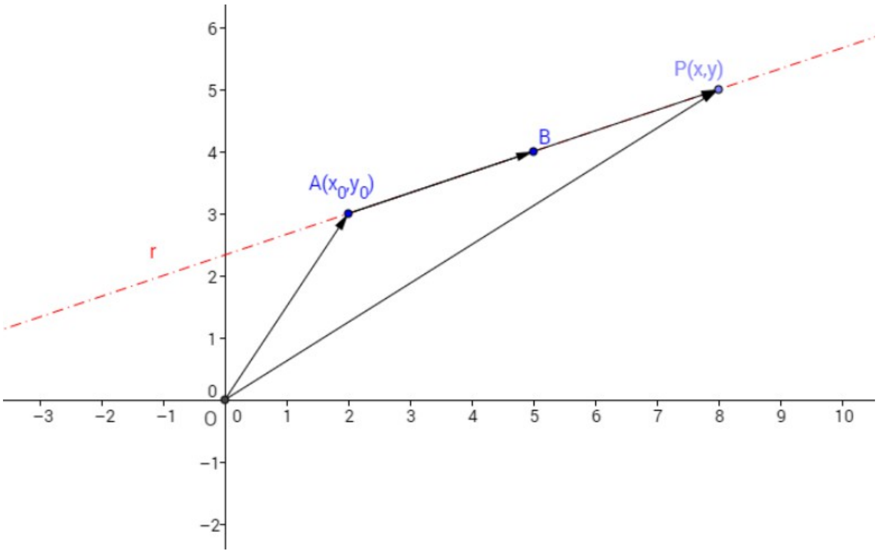
Dos rectas paralelas poseen la misma dirección. Al trabajar con rectas, el concepto de sentido desaparece. En rectas, solo nos interesará la dirección. Y denotaremos las rectas con letras minúsculas: $r, s, t, ...$

Un **vector director** de una recta es cualquiera de los infinitos vectores libres que tienen la misma dirección de la recta.

¿Cómo obtener la ecuación analítica de una recta? Necesitaremos un vector director (que marca la dirección) y un punto $(x_{0,} y_0)$ que pertenezca a la recta. Con estos dos datos, como veremos en el siguiente apartado, "comenzaremos a tirar del hilo" para desarrollar las distintas ecuaciones de la recta.

Ecuación vectorial de la recta

Sea r una recta de la que conocemos un vector director $\vec{AB}=(u_x, u_y)$. Sea $A(x_0, y_0)$ un punto de la recta r. ¿Cómo podemos obtener cualquier punto arbitrario $P(x, y)$ de la recta r a partir de estos datos?



La gráfica muestra un vector $\vec{AP}$ que es combinación lineal del vector $\vec{AB}$, al ser paralelos. Por lo tanto:

$$\vec{AP}=\lambda\cdot\vec{AB}, \quad \lambda\in\mathbb{R} \ .$$

Además, aplicando las propiedades de la suma de vectores:

$$\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}$$

Si sustituimos en esta igualdad el valor anteriormente obtenido del vector $\vec{AP}$:

$$\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda\cdot\vec{AB}$$

Sabemos las coordenadas de los siguientes vectores: $\vec{OP}=(x, y)$, $\vec{OA}=(x_0, y_0)$ y $\vec{AB}=(u_x, u_y)$. Por lo tanto:

$(x, y)=(x_{0,} y_0)+\lambda \cdot (u_x, u_y)$ → **Ecuación vectorial de la recta**

Ecuación vectorial de la recta

$(x, y)=(x_{0,} y_0)+\lambda \cdot (u_x, u_y)$

(x, y) → Punto arbitrario de la recta.

$(x_{0,} y_0)$ → Coordenadas de un punto concreto perteneciente a la recta.

λ → Parámetro perteneciente a los números reales.

(u_x, u_y) → Componentes de uno de los vectores directores de la recta.

Ecuación paramétrica de la recta

Si trabajamos por componentes separadas en la ecuación vectorial, obtenemos la ecuación paramétrica.

Ecuación paramétrica de la recta

Pasamos de la ecuación vectorial $(x,y)=(x_{0,}y_0)+\lambda\cdot(u_x,u_y)$ a la ecuación paramétrica igualando componentes:

$\left\{\begin{matrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \end{matrix}\right\}$ → **Ecuación paramétrica de la recta**

Ecuación cartesiana o continua de la recta

Si despejamos el parámetro λ en cada ecuación paramétrica:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{x-x_0}{u_x}=\lambda \\ \dfrac{y-y_0}{u_y}=\lambda \end{matrix}\right\}$$

Igualamos:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}$$ → **Ecuación cartesiana o continua de la recta**

Ecuación cartesiana o continua de la recta

Pasamos de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana o continua despejando el parámetro λ e igualando:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}$$

Ecuación general o implícita de la recta

Operando sobre la ecuación continua:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \quad \rightarrow \quad u_y\cdot(x-x_0)=u_x\cdot(y-y_0) \quad \rightarrow \quad u_y\cdot x-u_y\cdot x_0=u_x\cdot y-u_x\cdot y_0$$

Reordenando → $u_y\cdot x-u_x\cdot y+u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=0$

Llamando → $u_y=A$, $-u_x=B$, $u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=C$

Nos queda → $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ → **Ecuación general o implícita de la recta**

Ecuación general o implícita de la recta

Las variables x , y de la recta se relacionan a través de una ecuación lineal igualada a cero.

$A\cdot x+B\cdot y+C=0$

Ejemplo

Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, cartesiana y general de la recta que pasa por los puntos $A(3,1)$, $B(7,-2)$.

En primer lugar obtenemos un vector director de la recta: $\vec{AB}=(7-3,-2-1)=(4,-3)$

Ecuación vectorial → $(x,y)=(3,1)+\lambda\cdot(4,-3)$

Ecuación paramétrica → $\begin{Bmatrix} x=3+4\lambda \\ y=1-3\lambda \end{Bmatrix}$

Ecuación cartesiana → $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-3}$

Ecuación general → $-3(x-3)=4(y-1)$ → $3x+4y-13=0$

Pendiente de una recta

Se llama **inclinación** de una recta al ángulo α que forma con el semieje positivo de abscisas. **La tangente de la inclinación es la pendiente** de la recta, que suele representarse con la letra m .

La inclinación de una recta coincide con la inclinación del representante canónico de uno de sus vectores directores. Y sabemos que la tangente de la inclinación de un vector se obtiene fácilmente a partir de sus coordenadas.

$\vec{u}=(u_x, u_y)$ → Representante canónico de un vector director de la recta

$tg(\alpha)=\frac{u_y}{u_x}$ → Pendiente del vector director

Recordamos la ecuación general o implícita de la recta:

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

$$u_y=A \quad , \quad -u_x=B \quad , \quad u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=C$$

Como la pendiente del vector director coincide con la pendiente de la recta, tendremos:

$$pendiente \;\; de \;\; la \;\; recta \equiv m=\frac{u_y}{u_x}=\frac{A}{-B} \quad \rightarrow \quad m=\frac{-A}{B}$$

Es decir, conocida la ecuación implícita de una recta, su pendiente es el **cociente cambiado de signo entre el coeficiente que acompaña a la variable x y el coeficiente que acompaña a la variable y en dicha ecuación implícita**.

Ecuación punto-pendiente de la recta

Partimos en esta ocasión de la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \rightarrow u_y\cdot(x-x_0)=u_x\cdot(y-y_0) \rightarrow \frac{u_y}{u_x}\cdot(x-x_0)=y-y_0$$

Recordamos que la pendiente de la recta se define como $\frac{u_y}{u_x}=m$. Por lo tanto:

$$m\cdot(x-x_0)=y-y_0 \rightarrow m=\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)}$$ → **Ecuación punto-pendiente de la recta**

Ecuación punto-pendiente de la recta

$$m=\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)}$$

m → Pendiente de la recta

$(x_{0,} y_0)$ → Punto conocido perteneciente a la recta

Ecuación explícita de la recta

Partiendo de la ecuación punto pendiente:

$$m=\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)} \;\rightarrow\; y-y_0=m\cdot(x-x_0) \;\rightarrow\; y=m\cdot x+y_0-m\cdot x_0$$

Llamando → $n=y_0-m\cdot x_0$

Obtenemos → $y=m\cdot x+n$ → **Ecuación explícita de la recta**

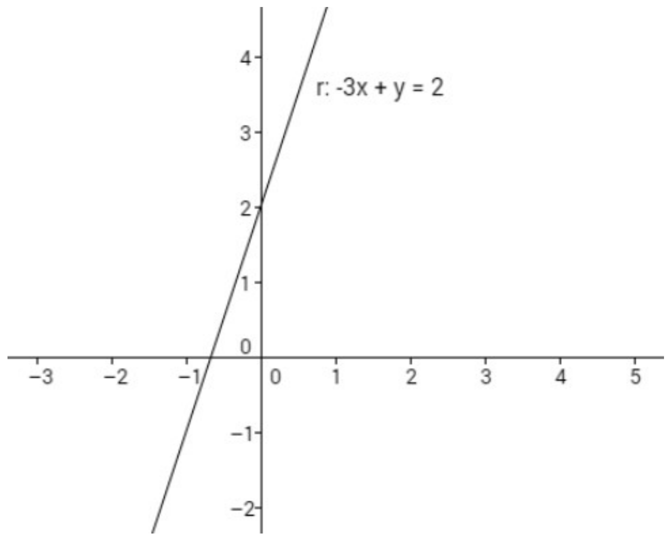
Ecuación explícita de la recta

$y=m\cdot x+n$

m → Pendiente de la recta

n → Corte de la recta con el eje vertical cuando $x=0$ → Valor de la recta en su paso por el eje de ordenadas (ordenada en el origen)

La siguiente recta r tiene ordenada en el origen igual a 2


r: -3x + y = 2

Ecuación segmentaria o canónica de la recta

Es aquella que viene dada en función de los puntos de corte de la recta con los ejes cartesianos. El punto de corte de la recta con el eje horizontal lo vamos a denotar como $(a,0)$. El punto de corte con el eje vertical como $(0,b)$. Podemos obtener los puntos de corte $(a,0)$ y $(0,b)$ en función de los parámetros de la ecuación general:

$$Ax+By+C=0 \;\rightarrow \text{si}\;\; y=0 \;\rightarrow\; Ax+C=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-C}{A} \;\rightarrow\; a=\frac{-C}{A} \;\rightarrow\; (a,0)=(\frac{-C}{A},0)$$

$$Ax+By+C=0 \;\rightarrow \text{si}\;\; x=0 \;\rightarrow\; By+C=0 \;\rightarrow\; y=\frac{-C}{B} \;\rightarrow\; b=\frac{-C}{B} \;\rightarrow\; (0,b)=(0,\frac{-C}{B})$$

Es decir, la ecuación general podemos expresarla de la siguiente forma:

$Ax+By+C=0 \;\rightarrow\; Ax+By=-C \;\rightarrow\; \frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1 \;\rightarrow\; \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \;\rightarrow$ **Ecuación segmentaria o canónica de la recta**

Ecuación segmentaria o canónica de la recta

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$a \;\rightarrow$ Corte de la recta con eje horizontal (abscisa en el origen)

$b \;\rightarrow$ Corte de la recta con eje vertical (ordenada en el origen)

Si partimos de la ecuación explícita de la recta, también podemos expresar los puntos de corte $(a,0)$ y $(0,b)$ en función de los parámetros de la ecuación explícita:

$$y=mx+n \;\rightarrow \text{si}\;\; y=0 \;\rightarrow\; 0=mx+n \;\rightarrow\; x=\frac{-n}{m} \;\rightarrow\; a=\frac{-n}{m} \;\rightarrow\; (a,0)=(\frac{-n}{m},0)$$

$$y=mx+n \;\rightarrow \text{si}\;\; x=0 \;\rightarrow\; y=n \;\rightarrow\; b=n \;\rightarrow\; (0,b)=(0,n)$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para $(a,0)$ y $(0,b)$:

$$\frac{-C}{A}=\frac{-n}{m} \quad , \quad \frac{-C}{B}=n$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos

Sean $A(x_{1,} y_1)$, $B(x_{2,} y_2)$ dos puntos conocidos de la misma recta r . Podemos obtener la ecuación de la recta suponiendo un punto genérico $C(x, y)$ que también pertenezca a la recta y calculando su pendiente a partir de dos puntos (cociente entre la diferencia de las componentes verticales y la diferencia de las componentes horizontales):

Puntos $A(x_{1,} y_1)$, $B(x_{2,} y_2)$ $\rightarrow$ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Puntos $B(x_{2,} y_2)$, $C(x, y)$ $\rightarrow$ $m=\frac{y-y_2}{x-x_2}$

Igualamos las pendientes:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}$ $\rightarrow$ **Ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos**

Otra opción, igualmente válida, os obtener la pendiente del segundo término de la igualdad con los puntos $A(x_{1,} y_1)$, $C(x, y)$ $\rightarrow$ $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ $\rightarrow$ y obtendríamos una expresión análoga a la primera $\rightarrow$ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}$$

$(x_{1,} y_1),(x_{2,} y_2)$ $\rightarrow$ Puntos conocidos de la recta

Ejemplo

Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,5)$, $B(-3,7)$.

Suponemos un punto arbitrario $C(x, y)$ de la recta:

$$\frac{7-5}{-3-2}=\frac{y-7}{x+3} \rightarrow \frac{2}{-5}=\frac{y-7}{x+3}$$