Teoría – Tema 7

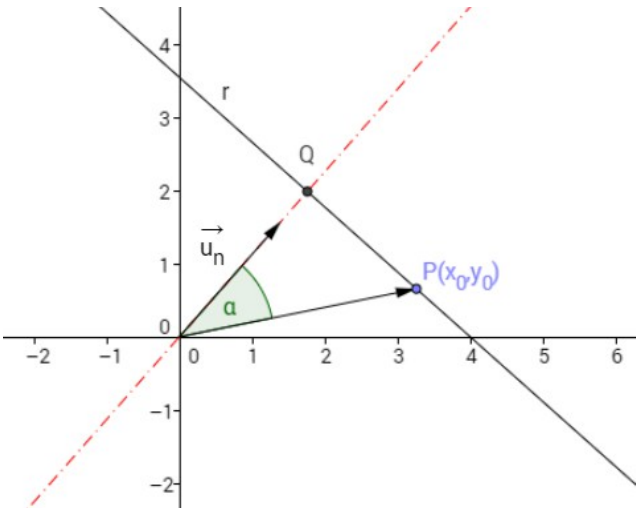
Distancia del origen a una recta

Índice de contenido

Distancia del origen del sistema de referencias a una recta

Sea una recta r y un punto perteneciente a la recta $P(x_0, y_0) \in r$.

Sea $\hat{u}_n = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$ un vector normal unitario de la recta r .



Si realizamos el producto escalar $\vec{OP} \cdot \hat{u}_n$ tendremos:

$$\vec{OP} \cdot \hat{u}_n = (x_0, y_0) \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right) = \frac{A \cdot x_0}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B \cdot y_0}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Este producto escalar también podemos calcularlo usando los módulos de ambos vectores y al ángulo que forman entre si:

$$\vec{OP} \cdot \hat{u}_n = |\vec{OP}| \cdot |\hat{u}_n| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{OP}| \cdot \cos(\alpha)$$

Donde hemos aplicado que el módulo del vector normal unitario es igual a 1 . Igualando ambos resultados del producto escalar.

$$|\vec{OP}| \cdot \cos(\alpha) = \frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

El ángulo α aparece en el triángulo rectángulo de vértices OQP y su coseno cumple la relación:

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{OQ}|}{|\vec{OP}|} \rightarrow |\vec{OP}|\cdot\cos(\alpha)=|\vec{OQ}|$$

El módulo $|\vec{OQ}|$ es la distancia del origen a la recta (al ser el vector $\vec{QP}$ perpendicular a la recta).

Llamando a esta distancia d tendremos una expresión analítica para calcularla.

Distancia del origen del sistema de referencias a una recta, conocido un punto $P(x_0, y_0)$ de la recta

$$d(O,r)=\left|\frac{A\cdot x_0+B\cdot y_0}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Donde asumimos que las distancias siempre son positivas, y por eso aplicamos el valor absoluto.

Si recordamos la ecuación general de la recta $r: Ax+By+C=0$, realizamos los siguientes cambiso de nomenclatura:

$$A=u_y \quad , \quad B=-u_x \quad , \quad C=u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=-B\cdot y_0-A\cdot x_0=-(A\cdot x_0+B\cdot y_0)$$

Es decir, la distancia del origen a la recta también podemos expresarla en función del parámetro C de la ecuación general.

Distancia del origen del sistema de referencias a una recta, conocidos los parámetros de la ecuación general $r: Ax+By+C=0$

$$d(O,r)=\left|\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$