Problemas – Tema 7

Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 1 - Problemas 1, 2, 3, 5, 7, 8

Hoja 1. Problema 1

Resuelto por Juan Luís Pérez Valero (abril 2015)

1. Dado el segmento de extremos $A(-7,3)$ y $B(5,11)$, halla la ecuación de su mediatriz.

Primero calculamos la recta r que pasa por los extremos del segmento, sabiendo que un vector director de esa recta es:

$$\vec{AB}=(5+7,11-3)=(12,8)$$

La pendiente de la recta r es:

$$m_r=\frac{u_y}{u_x}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

Como tenemos la pendiente y un punto por el que pasa la recta r (en verdad tenemos dos puntos, A y B) podemos obtener la ecuación punto-pendiente:

$$m=\frac{(y-Yo)}{(x-Xo)} \rightarrow r:\frac{2}{3}=\frac{y-3}{x+7} \rightarrow r:y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{23}{3}$$

La mediatriz s es perpendicular a la recta r , por lo que sus pendientes cumplen la relación:

$$m_s\cdot m_r=-1 \rightarrow m_s=\frac{-1}{2/3}=\frac{-3}{2}$$

Sabemos que la mediatriz s pasa por el punto medio del segmento.

$$P.M.\left(\frac{-7+5}{2},\frac{3+11}{2}\right)=(-1,7)$$

Tenemos la pendiente de la mediatriz s y un punto por el que pasa, así que expresamos la recta de la mediatriz en forma de ecuación punto-pendiente:

$$\frac{-3}{2}=\frac{y-7}{x+1}$$

Hoja 1. Problema 2

Resuelto por Andrés Fernández Ortega (abril 2015)

2. Halla la distancia del punto $P(1,0)$ **a la recta** $r: \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$ **.**

Por el punto P trazamos una perpendicular a la recta r . Para esto hallamos la pendiente m_r y, a partir de esta, la pendiente de su perpendicular m_s :

$$m_r=\frac{u_y}{u_x} \rightarrow m_r=\frac{-A}{B} \rightarrow m_r=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$$

La pendiente de la perpendicular será inversa y opuesta:

$$m_s=\frac{3}{2}$$

Teniendo la pendiente de la recta perpendicular s y un punto $P(1,0)$, se puede expresar la recta en la ecuación punto-pendiente:

$$s: \frac{3}{2}=\frac{y}{x-1}$$

Ahora se pasan ambas ecuaciones a forma explícita y hacemos un sistema para hallar el punto de corte Q de ambas rectas:

$$\left\{ \begin{array}{c} s: y=\frac{3x-3}{2} \\ r: y=\frac{-2x+12}{3} \end{array} \right\}$$

Por igualación:

$$\frac{3x-3}{2}=\frac{-2x+12}{3} \rightarrow x=\frac{33}{13} \rightarrow y=\frac{3\frac{33}{13}-3}{2}=\frac{30}{13}$$ → Punto intersección: $Q(\frac{33}{13},\frac{30}{13})$

Con este punto de intersección $Q(\frac{33}{13},\frac{30}{13})$ y el punto $P(1{,}0)$, hallamos el módulo del vector que va de un punto a otro y esa será la distancia del punto P a la recta r .

$$\vec{PQ}=(\frac{33}{13}-1,\frac{30}{13})=(\frac{20}{13},\frac{30}{13})$$

$$d(P,r)=|\vec{PQ}|=\sqrt{\frac{400+900}{13^2}}=\sqrt{\frac{1300}{13^2}}=\sqrt{\frac{100\cdot 13}{13^2}}=\frac{10}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$$

Esta distancia podríamos haberla obtenido directamente aplicando el resultado general demostrado en la teoría de clase. Para una recta $r: Ax+By+C=0$ y un punto externo a la recta $P(x_0,y_0)$, la distancia del punto a la recta se obtiene de:

$$d(P,r)=|\frac{Ax_0+Bx_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}|$$

Aplicado a nuestro problema con $r:\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$ y $P(1,0)$, resulta:

$$d(P,r)=|\frac{\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 0-1}{\sqrt{(\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{4})^2}}|=\frac{10\sqrt{13}}{13}$$

Hoja 1. Problema 3

Resuelto por Clara Meca (abril 2015)

3. Halla el punto simétrico de $A(1,1)$ **respecto de la recta** $r: x-3y-12=0$ **.**

Buscamos un punto $B(x,y)$ que se encuentre a la misma distancia de la recta r a la que se encuentra el punto $A(1,1)$. De tal forma que ambos puntos estén unidos por una recta perpendicular a r .

Así, el punto $B(x,y)$ será el simétrico de $A(1,1)$ respecto al eje de simetría formado por la recta r .

La recta $r: x-3y-12=0$ tiene por vector director $\vec{u}_r=(-B,A)=(3,1)$ $\rightarrow$ $m_r=\frac{1}{3}$.

Por lo tanto, una recta s perpendicular a r tendrá por pendiente $m_s=-3$.

Puede trazar la recta s que pasa por $A(1,1)$ y es perpendicular a r .

$$s: -3=\frac{y-1}{x-1} \quad \rightarrow \quad s: 3x+y-4=0$$

Esta recta s corta a r en un punto C , que será el punto medio del segmento formado por los puntos $A(1,1)$ y $B(x,y)$.

Para obtener C resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} r: x-3y-12=0 \\ s: 3x+y-4=0 \end{Bmatrix}$$

Para resolver multiplicamos la primera ecuación por 3 .

$$\begin{Bmatrix} 3x-9y-36=0 \\ 3x+y-4=0 \end{Bmatrix}$$

Restamos ambas ecuaciones.

$$-10\mathrm{y}-32=0 \;\rightarrow\; y=\frac{-16}{5} \;\rightarrow\; x=\frac{12}{5} \;\rightarrow\; C\left(\frac{12}{5},\frac{-16}{5}\right)$$

Si $C\left(\frac{12}{5},\frac{-16}{5}\right)$ es el punto medio del segmento de extremos $A(1,1)$ y $B(x,y)$:

$$\left(\frac{12}{5},\frac{-16}{5}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y+1}{2}\right)$$

Igualando componente a componente:

$$\frac{12}{5}=\frac{x+1}{2} \;\rightarrow\; x=\frac{19}{5}$$

$$\frac{-16}{5}=\frac{y+1}{2} \;\rightarrow\; y=\frac{-37}{5}$$

Por lo tanto el punto simétrico buscado es:

$$B\left(\frac{19}{5},\frac{-37}{5}\right)$$

Hoja 1. Problema 5

Resuelto por María Mundi (abril 2015)

5. Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta $r: 3x-4y+10=0$ **.**

Utilizamos la fórmula de la distancia de una recta al origen de coordenadas:

$$d(O,r)=\left|\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{-10}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=2$$

Hoja 1. Problema 7

Resuelto por Inés Delgado (abril 2015)

7. Dada la recta $r: x-2y=0$ y los puntos $A(0,3)$ y $B(-1,5)$. Halla los extremos del segmento simétrico al $\vec{AB}$ respecto de la recta.

Buscamos la recta perpendicular a r que pae por el punto $A(0,3)$, y que llamaremos s . Para ello, calculamos la pendiente de la recta r .

$$m_r=\frac{-A}{B}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto → $m_s=-2$

Aplicamos la ecuación punto-pendiente para la recta s .

$$m=\frac{y-y0}{x-x0} \rightarrow s: -2x=y-3 \rightarrow s: 2x+y-3=0$$

Calculamos el punto de corte entre las rectas r y s , resolviendo el siguiene sistema:

$$\begin{Bmatrix} r: x-2y=0 \\ s: 2x+y-3=0 \end{Bmatrix} \rightarrow (x,y)=(\frac{6}{5},\frac{3}{5})$$

Este punto de corte $(x,y)=(\frac{6}{5},\frac{3}{5})$ es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, siendo A' el punto sim-etrico de A respecto de la recta r . Por lo tanto podemos obtener A' :

$$(\frac{6}{5},\frac{3}{5})=(\frac{x+0}{2},\frac{y+3}{2}) \rightarrow A'(\frac{12}{5},\frac{-9}{5})$$

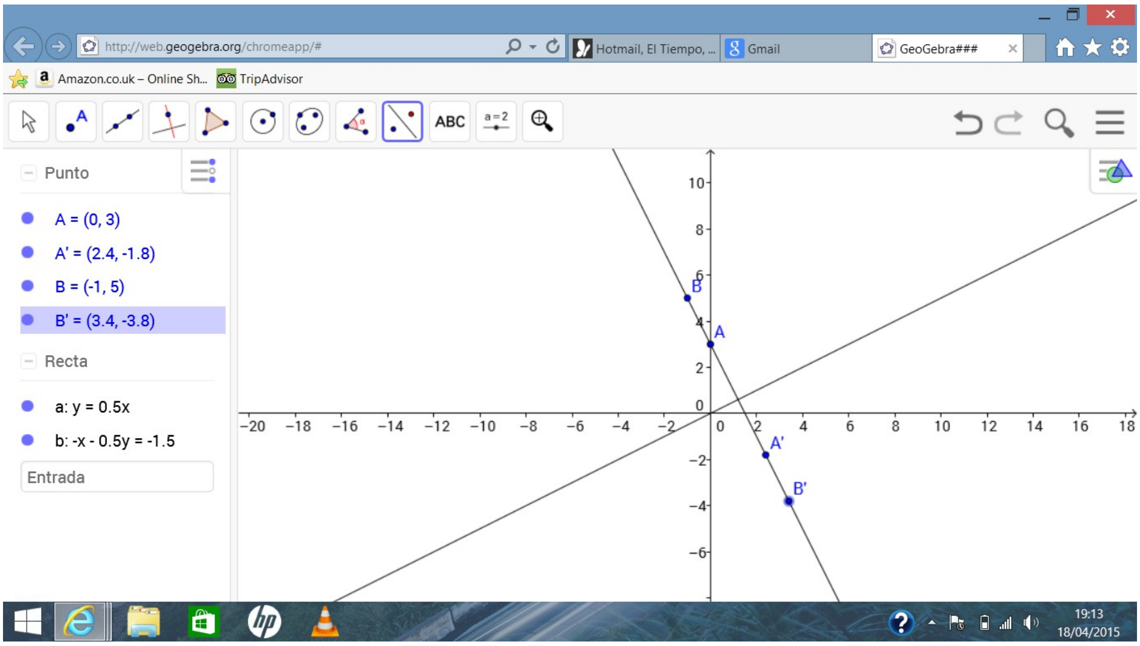
Para obtener el punto B' simétrico a $B(-1,5)$, comprobamos que la recta s anteriormente calculada también pasa por el punto B . Es decir:

$$s: 2x + y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad B(-1,5) \in s$$

Por lo tanto, el punto $(x, y) = (\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ también cumple que es el punto medio del segmento $\overline{BB'}$. Es decir:

$$(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}) = (\frac{x-1}{2}, \frac{y+5}{2}) \quad \rightarrow \quad B'(\frac{17}{5}, \frac{-19}{5})$$

La siguiente gráfica muestra la solución del problema.



Hoja 1. Problema 8

Resuelto por José Mª Soto (abril 2015)

8. Calcula la distancia entre las rectas $r: 3\mathrm{x}-4\mathrm{y}+5=0$ **y** $s: 3\mathrm{x}-4\mathrm{y}-15=0$

Ambas rectas son paralelas, al compartir los términos A y B en sus ecuaciones generales.
Utilizamos la fórmula obtenida en clase para la distancia entre dos rectas paralelas.

$$d(r,s)=\left|\frac{C-C'}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{5+15}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=4$$