

## Problemas – Tema 7

### Solución a problemas de ampliación de los Temas 5 y 6 - Hoja 13 - Todos resueltos

#### Hoja 13. Problema 1

**1. Sea una circunferencia de centro  $(0,2)$  y radio 2 unidades. Sea una segunda circunferencia de centro  $(3,0)$  y radio 3 unidades. Ambas circunferencias se cortan en los puntos  $A$  y  $B$ . Obtener la recta que une a los puntos  $A$  y  $B$ .**

La circunferencia de centro  $(0,2)$  y radio 2 tiene por ecuación:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

Mientras que la circunferencia de centro  $(3,0)$  y radio 3 tiene por ecuación:

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

Los puntos de corte de ambas circunferencias son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = \sqrt{9 - (x-3)^2} \end{cases} \rightarrow x^2 + (\sqrt{9 - (x-3)^2} - 2)^2 = 4$$

Desarrollamos el binomio:

$$x^2 + 9 - (x-3)^2 + 4 - 4\sqrt{9 - (x-3)^2} = 4 \rightarrow x^2 + 9 - (x^2 + 9 - 6x) = 4\sqrt{9 - (x-3)^2}$$
$$6x = 4\sqrt{9 - (x-3)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$36x^2 = 16(9 - (x^2 + 9 - 6x)) \rightarrow 36x^2 = 16(-x^2 + 6x) \rightarrow 36x^2 = -16x^2 + 96x$$
$$52x^2 - 96x = 0 \rightarrow x(52x - 96) = 0$$

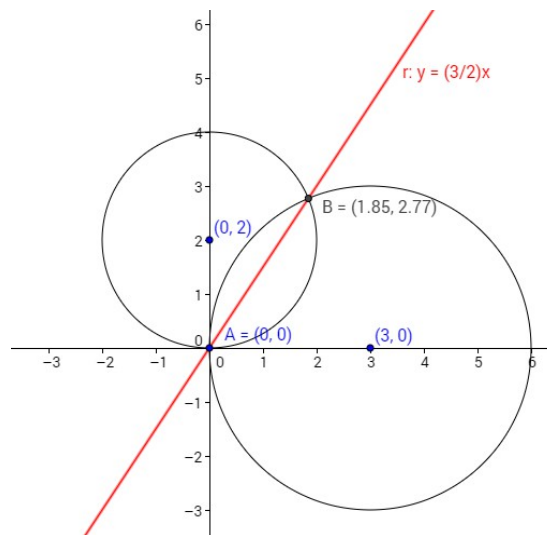
La dos soluciones son:

$$x=0 \rightarrow \text{Sustituimos por ejemplo en } (x-3)^2 + y^2 = 9 \rightarrow y=0 \rightarrow A(0,0)$$

$$x = \frac{96}{52} = \frac{24}{13} \rightarrow \text{Sustituimos en } (x-3)^2 + y^2 = 9 \rightarrow y = \frac{36}{13} \rightarrow B\left(\frac{24}{13}, \frac{36}{13}\right)$$

Por lo tanto la recta que una ambos puntos solución es:

$$\frac{\frac{36}{13}}{\frac{24}{13}} = \frac{y}{x} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$



## Hoja 13. Problema 2

2. a) Sea un segmento de extremo inicial  $A(1,2)$  y extremo final  $B(3,-2)$ . Obtener los extremos del segmento simétrico respecto a la simetría central de centro el punto  $P(0,5)$ .

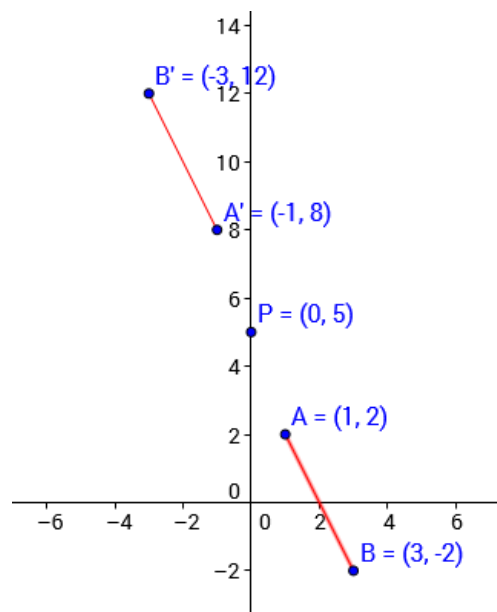
b) Obtener el ángulo formado por el corte de las rectas  $r: \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$  y  $s: y = \frac{-1}{3}x - 1$

a) Debemos obtener los puntos simétricos  $A'(x_A, y_A)$  y  $B'(x_B, y_B)$  respecto al centro de simetría  $P(0,5)$ .

El centro de simetría es el punto medio de los segmentos  $\overline{AA'}$  y  $\overline{BB'}$  respectivamente. Por lo tanto:

$$(0,5) = \left( \frac{1+x_A}{2}, \frac{2+y_A}{2} \right) \rightarrow A'(x_A, y_A) = (-1, 8)$$

$$(0,5) = \left( \frac{3+x_B}{2}, \frac{-2+y_B}{2} \right) \rightarrow B'(x_B, y_B) = (-3, 12)$$



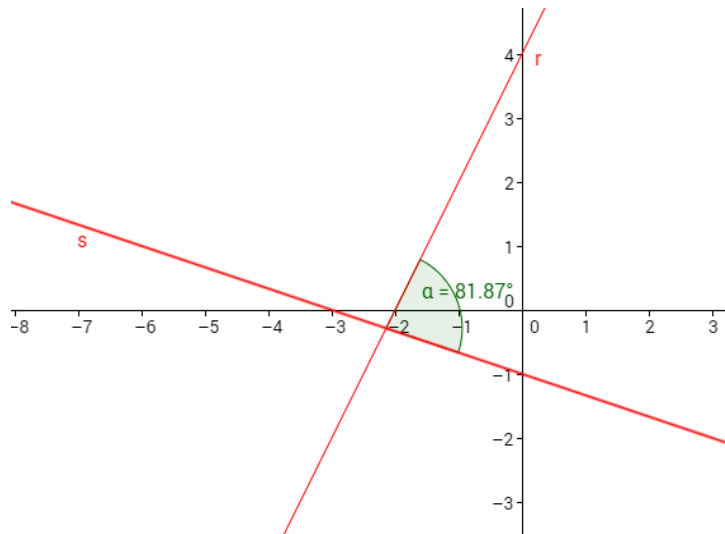
b) Sean las rectas  $r: \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$  y  $s: y = \frac{-1}{3}x - 1$ . Sus pendientes son:

$$r: \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \rightarrow r: y = 2x + 4 \rightarrow m_r = 2$$

$$s: y = \frac{-1}{3}x - 1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{3}$$

El ángulo formado por el corte de ambas rectas cumple la siguiente relación para su tangente:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| = \left| \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \right| = 7 \rightarrow \alpha \approx 81,87^\circ$$



## Hoja 13. Problema 3

3.a) Determina la ecuación de las rectas tangentes a la elipse  $2x^2 + y^2 = 8$  trazadas desde el punto  $P(-1,5)$ .

b) Obtener la ecuación de la elipse de focos sobre una recta paralela al eje de abscisas, centrada en  $(-1,3)$ , con semieje menor 8 y excentricidad  $\frac{3}{5}$ .

a) El haz de rectas con ecuación punto-pendiente que pasa por el punto  $P(-1,5)$  es:

$$m = \frac{y-5}{x+1} \rightarrow y = m(x+1) + 5$$

Si llevamos este valor a la ecuación de la elipse:

$$2x^2 + (m(x+1) + 5)^2 = 8 \rightarrow 2x^2 + m^2(x+1)^2 + 25 + 10m(x+1) = 8$$

$$2x^2 + m^2(x^2 + 1 + 2x) + 25 + 10m(x+1) = 8 \rightarrow x^2(2+m^2) + x(2m^2 + 10m) + m^2 + 10m + 17 = 0$$

Resolvemos:

$$x = \frac{-(2m^2 + 10m) \pm \sqrt{(2m^2 + 10m)^2 - 4(2+m^2)(m^2 + 10m + 17)}}{2(2+m^2)}$$

Para que la recta sea tangente, necesitamos que la solución de la ecuación de segundo grado sea única. Por lo que imponemos la condición de que el discriminante sea igual a 0.

$$(2m^2 + 10m)^2 - 4(2+m^2)(m^2 + 10m + 17) = 0$$

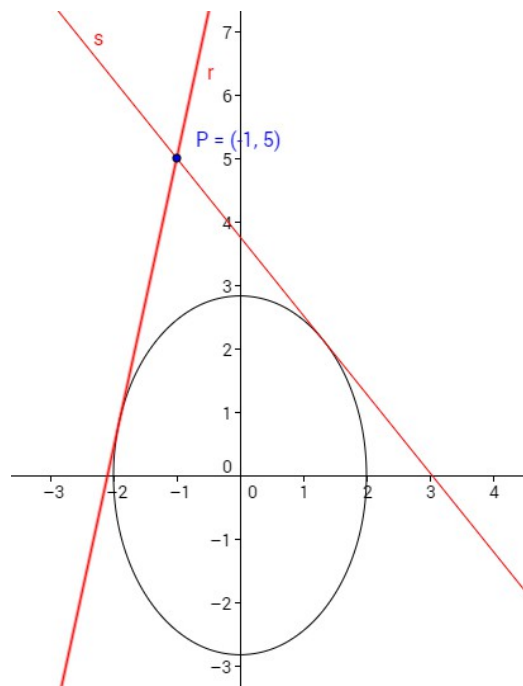
$$3m^2 - 10m - 17 = 0$$

$$m = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 204}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{304}}{6} \rightarrow m \simeq 4,57, \quad m \simeq -1,23$$

Ya tenemos las dos pendientes de las rectas tangentes que pasan por  $P(-1,5)$ .

$$r: 4,57 = \frac{y-5}{x+1} \rightarrow r: y = 4,57x + 9,57$$

$$s: -1,23 = \frac{y-5}{x+1} \rightarrow s: y = -1,23x + 3,76$$



b) La expresión general de la elipse con focos sobre recta paralela al eje de abscisas será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Por los datos del enunciado:

$$(x_0, y_0) = (-1, 3)$$

$$b = 8$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

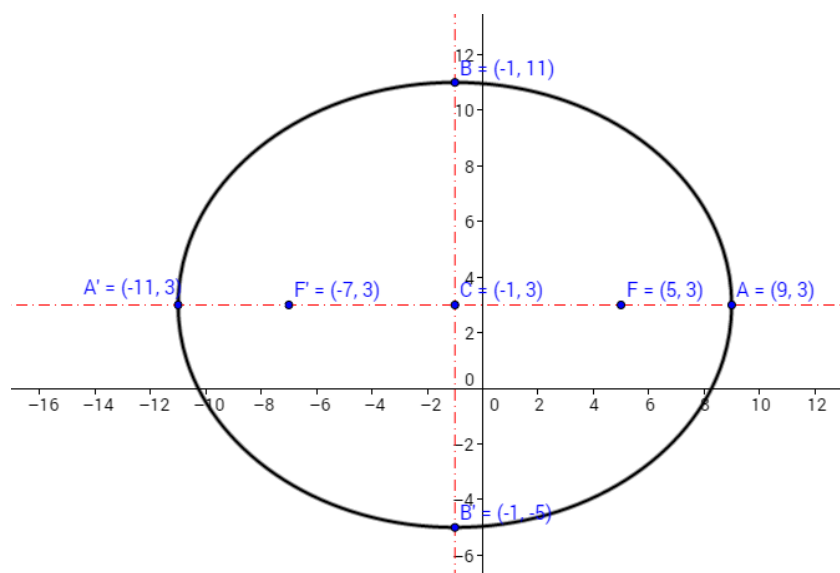
Sabemos que toda elipse cumple su relación fundamental  $a^2 = b^2 + c^2$ . Y si  $b = 8$  y

$c = \frac{3}{5}a$  podemos expresar esta relación fundamental de la forma:

$$a^2 = 64 + \frac{9}{25}a^2 \rightarrow a = 10$$

Y la ecuación de la elipse resulta:

$$\frac{(x+1)^2}{10^2} + \frac{(y-3)^2}{8^2} = 1$$



## Hoja 13. Problema 4

**4. Dada la elipse  $x^2 + 2y^2 = 6$ , obtener las coordenadas de un rectángulo inscrito en la elipse, de lados paralelos a los ejes de la elipse, y de perímetro 12 unidades. Representa la elipse gráficamente, indicando las coordenadas de los puntos  $A, A', B, B', F, F'$ , y representa también los cuatro vértices del rectángulo solución.**

Tenemos una elipse centrada en el origen de coordenadas, con ejes coincidentes con los cartesianos y focos sobre el eje OX.

El rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes tendrá los cuatro vértices sobre la elipse: un vértice  $P_1$  en el primer cuadrante, otro  $P_2$  en el segundo, otro  $P_3$  en el tercero y el último  $P_4$  en el cuarto.

Supongo que las coordenadas de  $P_1$  son  $P_1(x, y)$ . De esta forma  $P_2(-x, y)$ ,  $P_3(-x, -y)$ ,  $P_4(x, -y)$ .

Por lo tanto el perímetro de la elipse será:

$$12 = 2x + 2x + 2y + 2y \rightarrow 3 = x + y \rightarrow y = 3 - x$$

Este resultado lo llevo a la ecuación de la elipse para obtener las coordenadas  $(x, y)$ .

$$x^2 + 2(3 - x)^2 = 6 \rightarrow x^2 + 18 + 2x^2 - 12x = 6 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

Resolvemos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 \rightarrow y = 3 - 2 = 1$$

Por lo tanto:

$$P_1(x, y) = (2, 1)$$

$$P_2(-x, y) = (-2, 1)$$

$$P_3(-x, -y) = (-2, -1)$$

$$P_4(x, -y) = (2, -1)$$



Para obtener los puntos característicos de la elipse necesitamos los valores del semieje menor y mayor:

$$x^2 + 2y^2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \rightarrow a = +\sqrt{6}, \quad b = +\sqrt{3}$$

Y de la relación general que cumple toda elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 6 = 3 + c^2 \rightarrow c = +\sqrt{3}$$

Y ya podemos representar la cónica y el rectángulo inscrito.

