Teoría – Tema 7

Hipérbola

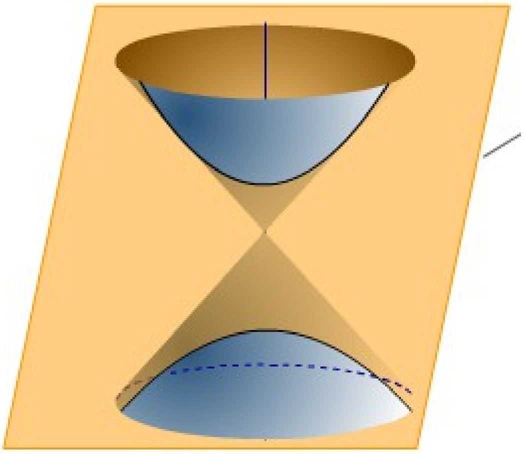
Índice de contenido

La hipérbola como superficie cónica

Si los dos conos de revolución con vértice común V son intersectados por un plano secante que no corta a todas las generatrices g , el resultado es una hipérbola.

A diferencia de la circunferencia y de la elipse, la hipérbola es una curva abierta.

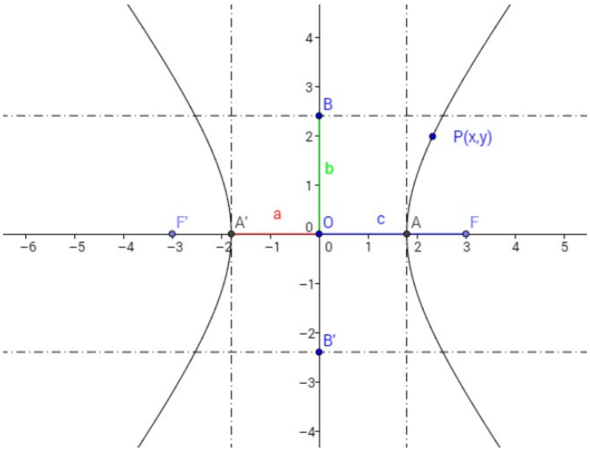
Los dos conos son cortados por un plano que no corta todas las generatrices
Imagen tomada de www.recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web



La hipérbola como lugar geométrico

La hipérbola es **el lugar geométrico de los puntos del plano $P(x,y)$ cuya diferencia de distancia a dos puntos fijos, llamados focos, es constante**.

Hipérbola de centro $O(0,0)$ y vértices sobre los ejes coordenados



La **distancia focal** $2c$ es la distancia entre los focos F y F'.

El **eje real** $2a$ es la longitud del segmento $\overline{AA'}$ formado por el corte de la curva con la recta que pasa por los focos. Los puntos A y A' son los vértices reales.

El **eje imaginario** $2b$ es la longitud del segmento $\overline{BB'}$ formado por los puntos B y B' que satisfacen la relación fundamental de la hipérbola $c^2=a^2+b^2$. El eje imaginario se encuentra sobre la mediatriz del eje real. Los puntos B y B' son los vértices imaginarios.

El **centro** (x_0,y_0) es el punto de corte del eje real con el eje imaginario. Si el centro coincide con el origen de coordenadas $(x_0,y_0)=(0,0)$. Y si, además, los ejes de la hipérbola coinciden con los ejes coordenados, los vértices A, A', B y B' se sitúan sobre los propios ejes OX y OY.

Los **radios vectores** son los segmentos que unen $P(x,y)$ con los focos F y F'. Si $d=\overline{PF}$ y $d'=\overline{PF'}$, por definición de hipérbola se cumplirá la constancia de la diferencia de ambas distancias:

$$d'-d=constante$$

El vértice real A pertenece a la hipérbola, por lo que satisface la constancia de la diferencia de distancias. Recordando que $2c$ es la distancia focal y $2a$ la longitud del eje real:

$d=\overline{AF} \rightarrow d=\overline{OF}-\overline{OA}=c-a$

$d'=\overline{AF'} \rightarrow d'=\overline{AO}+\overline{OF'}=a+c$

Por lo tanto:

Si $P(x,y)$ pertenece a la hipérbola, la diferencia de distancias a los focos es constante e igual a la longitud del eje real.
$d'-d=2a$

La hipérbola también satisface una relación fundamental, sabiendo que los vértices imaginarios B y B' no pertenecen a la ecuación de la hipérbola

Relación fundamental entre los parámetros de una hipérbola
$c^2=a^2+b^2$

Ecuación de la hipérbola con centro el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre eje OX

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la hipérbola, con centro en $O(0,0)$ y focos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$. Las distancias de P a los focos serán:

$$d=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$d'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Por definición de hipérbola:

$$d'-d=2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2+c^2-2cx+y^2$$
$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevamos nuevamente al cuadrado ambos miembros.

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 \rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

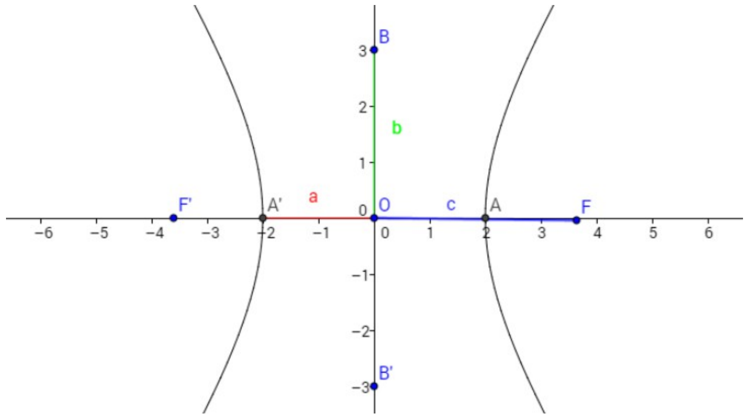
De la relación fundamental de la hipérbola sabemos que $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c^2-a^2=b^2$. Sustituimos:

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ $\rightarrow$ Dividimos todo por el factor a^2b^2

Ecuación de la hipérbola centrada en el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre el eje OX.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ *con focos* $F(\sqrt{13},0)$ *y* $F'(-\sqrt{13},0)$



Los focos F y F' siempre se encuentran sobre el eje real de la hipérbola.

Por definición, siempre se cumple $c\geq a$. En el caso extremo $c=a$, tendremos dos semirectas con inicio en cada uno de los focos.

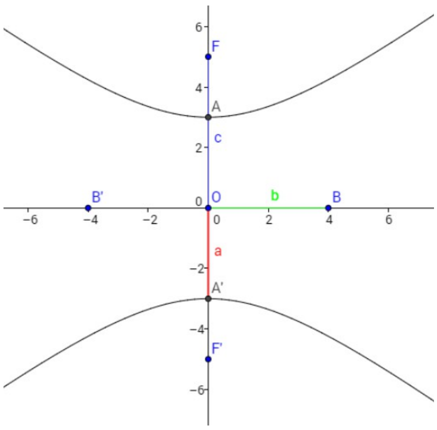
Ecuación de la hipérbola con centro el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre eje OY

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la hipérbola, con centro en $O(0,0)$ y focos $F(0,c)$ y $F'(0,-c)$. Siguiendo un razonamiento análogo al apartado anterior:

Ecuación de la hipérbola centrada en el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos sobre el eje OY.

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Hipérbola de ecuación $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1$ *con focos* $F(0,5)$ *y* $F'(0,-5)$



Ecuación de la hipérbola con centro distinto al origen de coordenadas, ejes paralelos a los cartesianos y focos en eje paralelo a OX

Sea $P(x, y)$ un punto genérico de la hipérbola, con centro en (x_0, y_0) y focos $F(x_0+c, y_0)$ y $F'(x_0-c, y_0)$. Las distancias de P a los focos serán:

$$d=\sqrt{(x-(x_0+c))^2+(y-y_0)^2}$$

$$d'=\sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}$$

Por definición de hipérbola:

$$d'-d=2a \rightarrow \sqrt{(x-(x_0-c))^2+(y-y_0)^2}-\sqrt{(x-(x_0+c))^2+(y-y_0)^2}=2a$$

Operando como en el apartado anterior, pero con un poco más de paciencia al aparecer los términos x_0 e y_0 , llegamos a la ecuación:

Ecuación de la hipérbola centrada en $(x_{0,} y_0)$, ejes paralelos a los cartesianos y focos sobre el eje paralelo al eje OX.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la hipérbola con centro distinto al origen de coordenadas, ejes paralelos a los cartesianos y focos en eje paralelo a OY

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la elipse, con centro en (x_0,y_0) y focos $F(x_{0,}y_0+c)$ y $F'(x_{0,}y_0-c)$. Siguiendo un razonamiento semejante al del apartado anterior:

Ecuación de la hipérbola centrada en $(x_{0,}y_0)$, ejes paralelos a los cartesianos y focos sobre el eje paralelo al eje OY.

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Excentricidad

La excentricidad de la hipérbola, denotada como e, es un parámetro que indica la menor o mayor apertura de las ramas de la hipérbola.

$$e=\frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad e \geq 1$$

Si $c=a \rightarrow e=1$ → Los focos coinciden con los vértices A y A' → Estamos ante dos semirectas con origen en los focos (hipérbola con ramas de apertura nula).

Si $c \gg a \rightarrow e \rightarrow \infty$ → Los focos están muy alejados de los vértices A y A' → Estamos ante dos ramas formadas por prácticamente rectas perpendiculares al eje real.

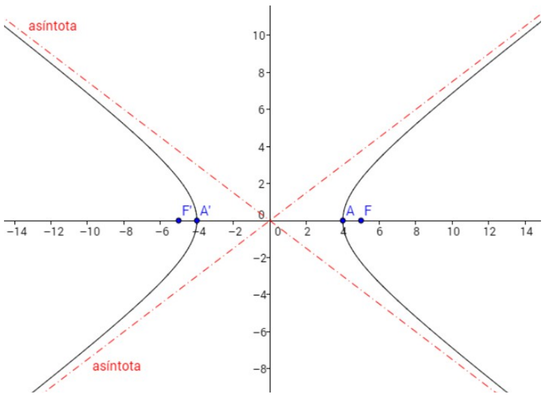
A mayor excentricidad, mayor apertura de las ramas de la hipérbola.

Asíntotas de una hipérbola

Una asíntota es una recta a la que una curva se acerca cada vez más conforme crece o decrece el valor de una variable. Se habla de acercamiento asintótico: la curva no llega a cortar nunca a la asíntota, pero tiende cada vez más a ella.

Toda hipérbola tiene dos asíntotas oblículas, que pasarán por el centro de la hipérbola con pendientes opuestas.

$$Asíntotas \quad de \quad una \quad hipérbola$$



Si la hipérbola está centrada en el origen de coordenadas, las asíntotas pasarán también por el origen $(0,0)$. Por lo que la ecuación explícita de cada asíntota será de la forma:

$$y=mx$$

Donde m es la pendiente de la recta.

Por definición, cuando la variable x se hace infinitamente grande, la curva $f(x)$ tiende a su asíntota oblícua. Esto se expresa matemáticamente bajo el concepto de límite (¡¡primera vez en el curso que hablamos de límite... ya veremos que no será la última).

$$Asíntota \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Es decir, si $f(x)$ tiende asintóticamente a $y=mx$, significa que en el infinito la curva $f(x)$ se comporta como la recta $y=mx$, por lo que ambas ecuaciones tienden a la pendiente común m .

¿Cuánto vale $f(x)$ en una hipérbola? Es el resultado de despejar y en función de la variable independiente x .

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \rightarrow \quad f(x)=y=\frac{\pm\sqrt{b^2x^2-a^2b^2}}{a}$$

¿Cómo aplicar el concepto de límite de la definición de asíntota? Por ahora nos basta con hacer la división $\frac{f(x)}{x}$ y aproximar el valor cuando x se hace infinitamente grande. Ya tendremos tiempo de profundizar muchísimo en los límites.

$$Asíntota \rightarrow \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \rightarrow \quad \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\pm\sqrt{b^2x^2-a^2b^2}}{a\,x}$$

Dividimos todo por x (recordando que dentro de la raíz entra como x^2).

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\pm\sqrt{\frac{b^2x^2}{x^2}-\frac{a^2b^2}{x^2}}}{\frac{a\,x}{x}}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\pm\sqrt{b^2-\frac{a^2b^2}{x^2}}}{a}$$

Cuando x se hace infinitamente grande, el factor $\frac{a^2b^2}{x^2}\rightarrow 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\pm\sqrt{b^2-\frac{a^2b^2}{x^2}}}{a}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\pm\sqrt{b^2}}{a}=\frac{\pm b}{a}$$

Ya que la expresión final con límite no depende de la variable x . Es decir, las pendientes de las asíntotas a la hipérbola son $m=\frac{\pm b}{a}$. Y las ecuaciones de las rectas:

Asíntotas de una hipérbola centrada en el origen de coordenadas, ejes sobre los cartesianos y focos en el eje OX.

$$y=\frac{b}{a}x \quad , \quad y=\frac{-b}{a}x$$

Si hablamos de una hipérbola centrada en el origen de coordenadas y con focos sen el eje OY:

$$y=\frac{a}{b}x \quad , \quad y=\frac{-a}{b}x$$

Si la hipérbola está centrada en (x_0, y_0) , con ejes paralelos a los cartesianos y focos sobre el eje paralelo al eje OX:

$$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \quad , \quad y-y_0=\frac{-b}{a}(x-x_0)$$

Si la hipérbola está centrada en (x_0, y_0) , con ejes paralelos a los cartesianos y focos sobre el eje paralelo al eje OY:

$$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \quad , \quad y-y_0=\frac{-a}{b}(x-x_0)$$

Hipérbola equilátera

Una hipérbola es equilátera cuando **coincide la longitud de su eje real y su eje imaginario**:

$a = b$

Llevando este resultado a la relación fundamental de la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos:

$c = \sqrt{2} \cdot a$

Las asíntotas de la hipérbola equilátera centrada en el origen y con los focos sobre alguno de los ejes cartesianos, coinciden (ya que $a = b$) y tienen por ecuación:

$y = \pm x$ → Bisectrices del primer y segundo cuadrante

Las asíntotas de la hipérbola equilátera centrada en (x_0, y_0) y con los ejes paralelos a los cartesianos, coinciden (ya que $a = b$) y tienen por ecuación:

$y - y_0 = \pm (x - x_0)$

Tangente a una hipérbola por un punto

Si el punto $P(x_{1,}y_1)$ **pertenece a la hipérbola**, y deseamos obtener la recta tangente a la rama de la hipérbola que lo contiene y que pasa por él, aplicamos el siguiente razonamiento: La recta tangente es una de las bisectrices de los radio vectores del punto $P(x_{1,}y_1)$; la otra bisectriz será la recta normal a la hipérbola.

Si el punto $P(x_{1,}y_1)$ **no pertenece a la hipérbola**, se escribe la ecuación del haz de rectas que pasa por el punto:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Y se resuelve el sistema que forma con la ecuación de la hipérbola, forzando que la solución del sistema sera única, para lo cual anulamos el discriminante de la ecuación de segundo grado resultante que aparece al operar con el sistema.