

## Taller

# Ecuaciones de primer y segundo grado explicadas por alumnos de Bachillerato a alumnos de Secundaria

## Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado es un polinomio de grado 1 igualado a 0. Es decir:

$$ax+b=0$$

Donde  $a$  ,  $b$  son números reales.

Resolver la ecuación implica despejar la incógnita  $x$  y obtener su valor.

$$ax+b=0 \rightarrow ax=-b \rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

Veamos ejemplos numéricos.

$$\blacksquare 3x+6=0 \rightarrow 3x=-6 \rightarrow x=\frac{-6}{3} \rightarrow x=-2$$

$$\blacksquare 2x-10=0 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=\frac{10}{2} \rightarrow x=5$$

$$\blacksquare \frac{x}{3}+5=0 \rightarrow \frac{x}{3}=-5 \rightarrow x=3 \cdot (-5) \rightarrow x=-15$$

$$\blacksquare 2x-\frac{1}{2}=0 \rightarrow 2x=\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$\blacksquare \frac{2x}{3}-\frac{5}{6}=0 \rightarrow \frac{2x}{3}=\frac{5}{6} \rightarrow x=\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 6} \rightarrow x=\frac{5}{4}$$

$$\blacksquare -2x+\frac{4}{3} \rightarrow -2x=\frac{-4}{3} \rightarrow x=\frac{-4}{(-2) \cdot 3} \rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$\blacksquare 2x+5=-4x+6 \rightarrow 2x+4x=6-5 \rightarrow 6x=1 \rightarrow x=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{x}{3} + 2 - \frac{5x}{6} &= \frac{2}{3} \rightarrow \frac{x}{3} - \frac{5x}{6} = \frac{2}{3} - 2 \rightarrow \frac{2x}{6} - \frac{5x}{6} = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} \rightarrow \frac{-3x}{6} = \frac{-4}{3} \rightarrow \frac{-x}{2} = \frac{-4}{3} \rightarrow \\ \rightarrow x &= \frac{2 \cdot (-4)}{(-1) \cdot 3} \rightarrow x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 2x + (3x + 1) \cdot 2 - 2(x + 1) &= 7x + 3 \rightarrow 2x + 6x + 2 - 2x - 2 = 7x + 3 \rightarrow \\ \rightarrow 2x + 6x - 2x - 7x &= 3 - 2 + 2 \rightarrow -x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{-1} \rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{x+4}{2} + 6(-x + \frac{1}{2}) &= 2x + 1 \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{4}{2} + 6 \cdot (-x) + 6 \cdot \frac{1}{2} = 2x + 1 \rightarrow \frac{x}{2} + 2 - 6x + 3 = 2x + 1 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{x}{2} - 6x - 2x &= 1 - 2 - 3 \rightarrow \frac{x}{2} - 8x = 1 - 5 \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{16x}{2} = -4 \rightarrow \frac{-15x}{2} = -4 \rightarrow \\ \rightarrow -15x &= -8 \rightarrow x = \frac{-8}{-15} \rightarrow x = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

## Ejercicios para practicar (resolver a mano y con Geogebra)

$$\blacksquare \quad \frac{x}{2} - 3 = 4$$

$$\blacksquare \quad 2x + 4 - 7x = 1 - 4x + 4 - x$$

$$\blacksquare \quad 3 \cdot (x + 4) = 2 \cdot (3 - 2x)$$

$$\blacksquare \quad 3 \cdot (5 - x) + 2 \cdot (3x + 2) = 5 \cdot (x - 5)$$

$$\blacksquare \quad \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{3} = 2 - x$$

$$\blacksquare \quad \frac{x-6}{2} - \frac{x+2}{5} = \frac{1-x}{2} + \frac{3+x}{4}$$

$$\blacksquare \quad 3(x-4) - \frac{2x-3}{4} = \frac{1-x}{2} + \frac{3+x}{4}$$

$$\blacksquare \quad 2 + \frac{x}{5} = 1 - \frac{6x}{2}$$

$$\blacksquare \quad \frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} = 3$$

$$\blacksquare \quad \frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{4} = 0$$

$$\blacksquare \quad (x - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} + \frac{x + \frac{1}{2}}{2} = 3x - 1$$

## Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es un polinomio de grado 2 igualado a 0.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son números reales.

¿Cómo despejar el valor de la incógnita  $x$  para resolver la ecuación? Por lo general, tendremos dos soluciones distintas.

Si  $b=0$  tendremos una ecuación de segundo grado incompleta. Por ejemplo:

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

Si  $c=0$  también tendremos una ecuación de segundo grado incompleta. Por ejemplo:

$$4x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(4x + 5) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \end{array} \right\}$$

Si tenemos una ecuación de segundo grado completa  $ax^2 + bx + c = 0$ , podemos obtener las dos soluciones gracias a una de las fórmulas más famosas de las matemáticas. Su demostración no es inmediata... pero merece la pena verla al menos una vez en la vida.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = 0 \rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0 \rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \rightarrow \\ &\rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \rightarrow \\ &\rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Las dos soluciones distintas son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos ejemplos numéricos.

$$\blacksquare x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} \rightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -3$$

$$\blacksquare x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 0}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -1 \text{ (solución doble)}$$

$$\blacksquare x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -2$$

$$\blacksquare 2x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{no existe la raíz cuadrada de un número negativo} \rightarrow \text{no existe solución}$$

## Ejercicios para practicar (resolver a mano y con Geogebra)

- ▣  $x^2 + x - 2 = 0$
- ▣  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- ▣  $-2x^2 = 9$
- ▣  $5x^2 + 2x = 0$
- ▣  $2x^2 - x - 1 = 0$
- ▣  $x^2 + 3x = -9$
- ▣  $-2 + 5x^2 = 4$
- ▣  $15x^2 + x - 2 = 0$
- ▣  $(x - 3)(x + 6) = -8$
- ▣  $2x^2 + 2x = 1 + x$