Problemas – Tema 9

Solución a problemas de derivadas - Hoja 1 - Todos resueltos

Hoja 1. Problema 1

1. a) Deriva y simplifica $f(x)=\dfrac{2}{7\cdot\cos^7(2x+1)}$

b) Deriva y simplifica $f(x)=\dfrac{x^2+\cos(x)}{e^{\frac{x^3}{3}+sen(x)}}$

c) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$

a) $f(x)=\dfrac{2}{7\cdot\cos^7(2x+1)} \rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{-1}{\cos^{14}(2x+1)}\cdot 7\cos^6(2x+1)\cdot(-sen(2x+1))\cdot 2$

$$f'(x)=\frac{4\,sen(2x+1)}{\cos^8(2x+1)}$$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+\cos(x)}{e^{\frac{x^3}{3}+sen(x)}} \rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x-sen(x))\cdot e^{\frac{x^3}{3}+sen(x)}-(x^2+\cos(x))\cdot e^{\frac{x^3}{3}+sen(x)}\cdot(x^2+\cos(x))}{\left(e^{\frac{x^3}{3}+sen(x)}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{(2x-sen(x))-(x^2+\cos(x))^2}{e^{\frac{x^3}{3}+sen(x)}}$$

c) $f(x)=1-\dfrac{1}{x} \rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f'(x)=0 \rightarrow 1=0$ → Absurdo matemático → No hay puntos críticos.

$(-\infty,0) \rightarrow f'(-1)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(0,+\infty) \rightarrow f'(1)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

La función es estrictamente creciente en todo su dominio.

Hoja 2. Problema 2

2. a) Calcula el número real m que cumple $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3$

b) Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de $f(x)=\ln(1-x^2)$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{2\cos(2x)}=\frac{m}{2}$$

Igualamos el límite a 3 , como exige el enunciado → $m=6$

b) $f(x)=\ln(1-x^2)$ → $Dom(f)=(-1,1)$, para que el argumento del logartimo sea positivo.

Calculamos la primera derivada para estudiar la monotonía.

$$f(x)=\ln(1-x^2) \rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=0$$

$(-1,0) \rightarrow f'(\frac{-1}{2})>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(0,1) \rightarrow f'(\frac{1}{2})<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Hoja 1. Problema 3

3. Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=e^{-x^2}$

La función está definida para todos los reales, por ser composición de funciones continuas en toda la recta real (polinomio y exponencial).

$Dom(f)=\mathbb{R}$

Corte con los ejes en $(0,1)$.

La función no periódica pero sí posee simetría par: $f(x)=f(-x)$

No existen asíntotas verticales por ser continua en toda la recta real.

Estudiamos la asíntota horizontal.

$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=0$ → Asíntota horizontal en $y=0$

Al haber horizontal no hay asíntota oblicua.

Calculamos la función derivada para estudiar la monotonía y los extremos relativos.

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f'(x)=0 \rightarrow x=0$ → Punto candidato a extremos relativo: $(0,1)$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los siguientes intervalos.

$(-\infty,0) \rightarrow f'(-10)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(0,+\infty) \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Para la curvatura realizamos la segunda derivada.

$$f''(x)=-2(e^{-x^2}+x(-2x)e^{-x^2})=-2e^{-x^2}(1-2x^2) \quad , \quad f''(x)=0 \rightarrow 1-2x^2=0 \rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

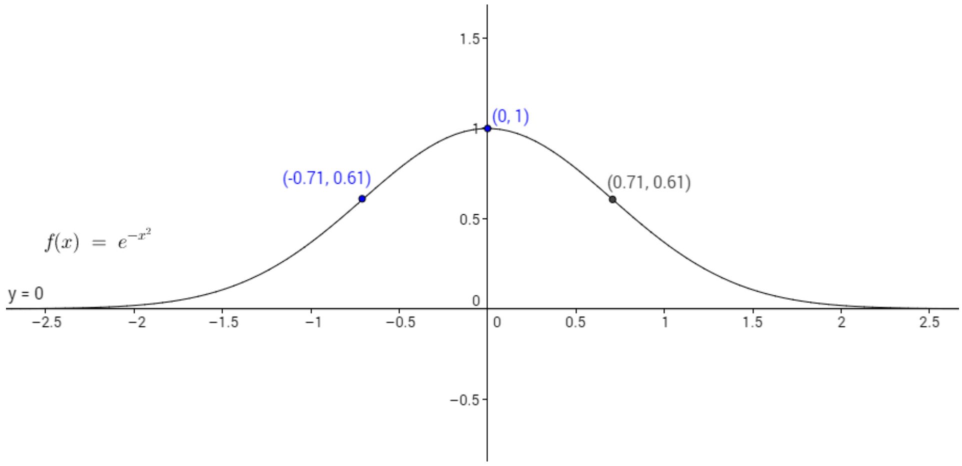
Poseemos dos candidato a puntos de inflexión en $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0{,}61)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0{,}61)$.

$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow f''(-10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

$(\frac{-\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow f'(0)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩

$(\frac{+\sqrt{2}}{2},+\infty) \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

En $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0{,}61)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0{,}61)$ confirmamos la presencia de puntos de inflexión.


$f(x) = e^{-x^2}$
y = 0
(0, 1)
(-0.71, 0.61)
(0.71, 0.61)
1.5
1
0.5
0
−0.5
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Hoja 1. Problema 4

4. Una compañía de cruceros ofrece un viaje para al menos 100 personas por un precio inicial de 2000 euros por persona.

Para animar las ventas decide rebajar el precio inicial en 10 euros por cada persona que rebase las 100. Así pues, si se apuntaran 120 personas, cada uno pagará 2000 – 20·10 = 1800 euros.

Calcula el número de personas que maximiza los ingresos de la compañía y el valor de dicho ingreso máximo.

El ingreso de la compañía por el viaje es igual al número de personas que viajan por el dinero que paga cada uno.

Definimos, pues, una función a trozos donde los ingresos son nulos si el número de viajeros es menor que 100 (ya que no habría viaje). Y para un número suficiente de viajeros, debemos recordar restar 10 euros al precio final que paga cada persona por cada uno de los viajeros que supera el número 100.

Si al número final de viajeros lo denominamos x , la función resulta:

$$Ingresos \equiv I = \begin{Bmatrix} 0 \quad si \quad x < 100 \\ x[2000 - (x-100)\cdot 10] \quad si \quad x \geq 100 \end{Bmatrix}$$

$$I = \begin{Bmatrix} 0 \quad si \quad x < 100 \\ -10x^2 + 3000x \quad si \quad x \geq 100 \end{Bmatrix}$$

Esta es la función que debemos optimizar: derivar e igualar a cero, y buscar el máximo relativo para $x \geq 100$.

$$I' = \begin{Bmatrix} 0 \quad si \quad x < 100 \\ -20x + 3000 \quad si \quad x \geq 100 \end{Bmatrix}$$

$$I' = 0 \quad \rightarrow \quad -20x + 3000 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 150 \quad viajeros$$

Evaluamos la primera derivada a izquierda y derecha de este punto crítico, para comprobar si es máximo relativo.

$f'(100) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ creciente

$f'(200) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ decreciente

Existe un máximo relativo, que también es absoluto, en $(150, f(150)) = (150, \ 225000)$. El ingreso máximo es de $225000 \quad euros$.