Problemas – Tema 9

Solución a problemas de derivadas - Hoja 8 - Todos resueltos

Hoja 8. Problema 1

a) Deriva $f(x)=arcosen(\sqrt{1-x^2})$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Determina el punto (x,y) **de la función** $f(x)=x^3-x$ **donde la recta tangente a la función en ese punto tenga pendiente igual a** 74 **.**

La pendiente de la recta tangente en un punto coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x_0)=m \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2-1 \quad , \quad m=74 \quad \rightarrow \quad x=\pm 5$$

Los puntos son → $(5, f(5))=(5,120)$, $(-5, f(-5))=(-5,-120)$

Hoja 8. Problema 2

a) Calcula el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+6x)}{sen(2x)}$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$ → Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+6x)}{sen(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{6}{1+6x}}{\cos(2x) \cdot 2} = \frac{6}{2} = 3$$

b) Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ **en** $x=-2$

La ecuación punto pendiente de la recta relaciona el punto del enunciado con la pendiente de su recta tangente a la función → $m = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$

$$x_0 = -2 \quad \to \quad f(-2) = \frac{-2}{5}$$

$$m = f'(-2) \quad \to \quad f'(x) = \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} \quad \to \quad f'(-2) = \frac{4+1-8}{(4+1)^2} = \frac{-3}{25}$$

La recta resulta → $\frac{-3}{25} = \frac{y+\frac{2}{5}}{x+2} \quad \to \quad \frac{-3}{25}x - \frac{6}{25} - \frac{2}{5} = y \quad \to \quad y = \frac{-3}{25}x - \frac{16}{25}$

Hoja 8. Problema 3

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x}{x+2}$

El dominio de este cociente de polinomios son todos los reales menos $x=-2$, valor que anula al denominador.

Los cortes con los ejes de coordenadas son en $(0,0)$.

La función no es par ni impar.

Asíntota vertical en $x=-2$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$, $\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

Asíntota horizontal en $y=1$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, de valor 1 por ser el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia (x) .

Si hay horizontal, no hay asíntota oblicua.

$$f(x)=\frac{x}{x+2} \rightarrow f'(x)=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow 2=0$ → Absurdo matemático → No hay puntos críticos candidatos a extremos relativos.

Evaluamos la derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-2) \rightarrow f'(-10)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(-2,\infty) \rightarrow f'(10)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

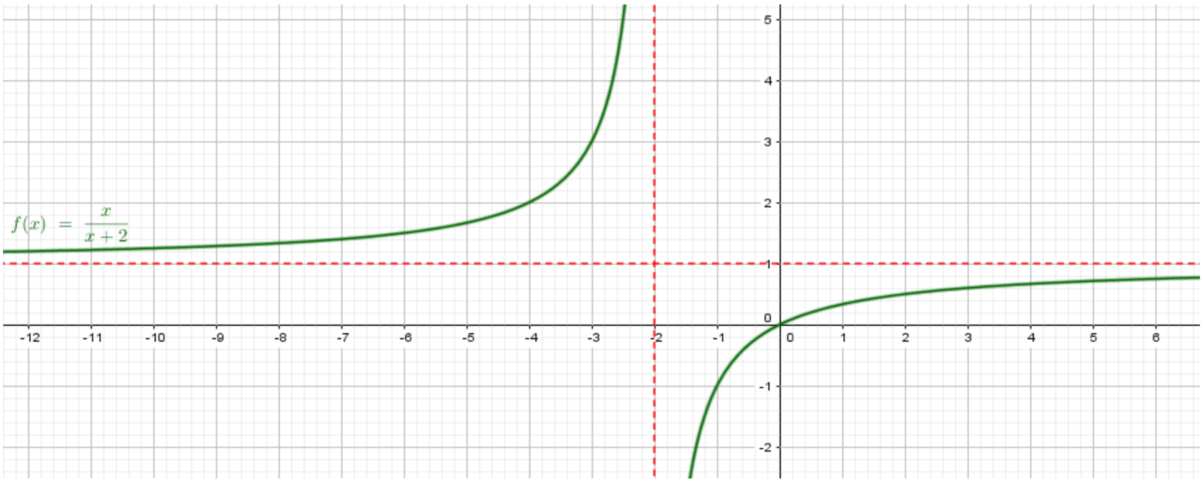
$$f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{-2\cdot2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{-4}{(x+2)^3}$$

$f''(x)=0 \rightarrow -4=0$ → No existen candidatos a puntos de inflexión.

Evaluamos la segunda derivada para estudiar la curvatura.

$(-\infty,-2) \rightarrow f''(-10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

$(-2,\infty) \rightarrow f''(10)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩


$f(x) = \frac{x}{x+2}$

Hoja 8. Problema 4

Una lata de refresco cilíndrica tiene un volumen de $333\,cm^3$. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible (ayuda: el volumen de un cilindro se calcula como el área de la base por la altura. Y el área de la cara lateral del cilindro es el perímetro de la base por la altura).

El coste de la lata será proporcional al área del cilindro. Por lo que deberemos optimizar dicha área.

El área del cilindro está formada por el área lateral y por el área de las dos bases circulares. Fíjate que las áreas de las bases debemos multiplicarla por 2, y que el precio de la chapa ahí es el doble que el precio de la chapa en la cara lateral.

$A_{lateral}=2\pi r h$ → donde r es el radio del cilindro y h su altura

$A_{base}=\pi r^2+\pi r^2=2\pi r^2$

Función a optimizar → $f=2\pi r h+2\cdot(2\pi r^2)=2\pi r h+4\pi r^2$

Para relacionar las dos variables que aparecen en la función, uso el dato del enunciado del volumen.

$$333=\pi r^2 h \quad\rightarrow\quad h=\frac{333}{\pi r^2} \quad\rightarrow\quad f=\frac{666\pi}{r}+4\pi r^2$$

Condición necesaria de extremos: primera derivada igual a cero.

$$f'=\frac{-666\pi}{r^2}+8\pi r=\frac{-666\pi+8\pi r^3}{r^2} \quad\rightarrow\quad f'=0 \quad\rightarrow\quad r=\frac{333}{4}$$ → punto crítico

Para demostrar que minimiza la función coste, evaluamos la segunda derivada en el punto crítico.

$$f'=\frac{-666\pi}{r^2}+8\pi r=\frac{-666\pi+8\pi r^3}{r^2} \quad\rightarrow\quad f'\left(\frac{333}{4}\right)>0 \quad\rightarrow\quad r=\frac{333}{4}$$ es un mínimo

Obtenemos, finalmente, la altura.

$$h=\frac{333}{\pi r^2}=\frac{333}{\pi\cdot\left(\frac{333}{4}\right)^2}=\frac{16}{333\pi}$$

Hoja 8. Problema 5

a) Calcula el límite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}\right)$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\,sen(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\,sen(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{tg(3x)}{tg(2x)}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{tg(3x)}{tg(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{(1+tg^2(3x))\cdot 3}{(1+tg^2(2x))\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

b) Estudia las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de $f(x)=\frac{x^2}{x+5}$

Las asíntotas verticales aparecen, en un cociente de polinomios, en los puntos que anulan al denominador.

$\lim_{x\to -5^-}\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to -5^+}\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{0^+}=+\infty$ → Asíntota vertical en $x=-5$

La horizontal requiere del estudio en el infinito de la función.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+5}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es ∞ por ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador. Al no existir asíntota horizontal podremo tener oblicua $y=mx+n$.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2}{x^2+5}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es 1 por ser un cociente de polinomios del mismo grado y por ser el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia de ambos polinomios (x^2) → $m=1$

$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+5}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+5}=\frac{-\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es -5 al aplicar el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia (x) → $n=-5$

La asíntota oblicua resulta $y=x-5$

Hoja 8. Problema 6

Aplica la definición formal de derivada a $f(x)=\frac{x}{x-1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x+hx-h-x^2-hx+x}{h(x+h-1)(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h-1)(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

Hoja 8. Problema 7

Estudia y representa gráficamente la función $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$$f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$$

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$$

Función impar, ya que $f(x)=-f(-x)$ → Simetría respecto al origen de coordenadas.

La función no corta a los ejes, ya que $x=0$ no pertenece al dominio y $f(x)=0 \rightarrow x^2+1=0$ que no tiene solución real.

Asíntota vertical en $x=0 \rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

No hay asíntota horizontal porque → $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, que tiende a infinito porque el grado del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador.

Al no haber horizontal, puede haber oblicua del tipo $y=mx+n$.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación, cuyo resultado es 1 por ser un cociente de polinomios del mismo grado y por ser el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia de ambos polinomios $(x^2) \rightarrow m=1$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \rightarrow n=0$$

La asíntota oblicua resulta $y=x$.

Estudiamos el crecimiento con la primera derivada.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x} \rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1$ → puntos críticos, candidatos a extremos relativos

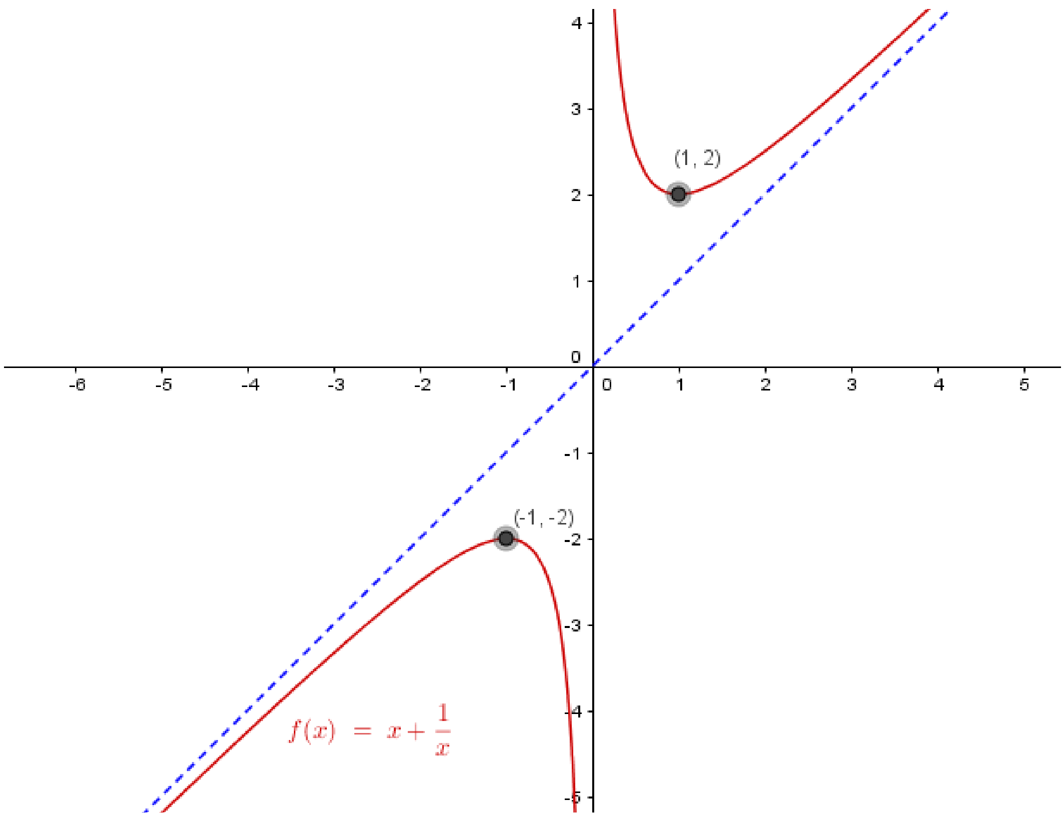
Evaluamos los puntos críticos en la segunda derivada, para saber si estamos ante máximos o mínimos.

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2} \quad \rightarrow \quad f''(x)=\frac{2x(x^2)-(x^2-1)2x}{x^4}=\frac{2x^2-(x^2-1)2}{x^3}=\frac{2}{x^3}$$

$f''(-1)<0 \quad \rightarrow \quad x=-1$ es un máximo relativo $\rightarrow \quad (-1,f(-1))=(-1,-2)$

$f''(1)>0 \quad \rightarrow \quad x=1$ es un mínimo relativo $\rightarrow \quad (1,f(1))=(1,2)$

Por último, no tenemos puntos de inflexión ya que la segunda derivada nunca se anula $\rightarrow \quad f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad 2=0 \quad \rightarrow$ Absurdo matemático.



Hoja 8. Problema 8

a) Determina a, b, c **para que la parábola** $f(x)=ax^2+bx+c$ **tenga el mínimo absoluto en el punto** $(2,-4)$ **y su segunda derivada en** $x=2$ **valga** 4 **.**

En el mínimo la primera derivada se anula.

$$f'(2)=0 \rightarrow f'(x)=2ax+b \rightarrow 4a+b=0$$

La función pasa por el punto $(2,-4)$.

$$f(2)=-4 \rightarrow 4a+2b+c=-4$$

Y finalmente aplicamos la condición de $f''(2)=4 \rightarrow f''(x)=2a \rightarrow 2a=4 \rightarrow a=2$

Sustituimos en las anteriores ecuaciones → $b=-8$, $c=4$

b) Calcula el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de $f(x)=x^3-x$

Obtenemos los puntos críticos, anulando la primera derivada.

$$f'(x)=3x^2-1 \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

La función original es continua en toda la recta real, por ser polinómica, por lo que estudiamos el crecimiento de la función en los siguientes intervalos.

$(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}) \rightarrow f'(-100)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \rightarrow f'(0)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty) \rightarrow f'(100)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

Por lo tanto, en $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ tenemos un máximo y en $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ tenemos un mínimo relativo.