Problemas – Tema 6

Enunciados de problemas de sistemas de ecuaciones y matrices

Hoja 1

1. Un cliente de un supermercado paga 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantea y resuelve un sistema para obtener el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que 1 litro de leche, y que 1kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de agua.

2. Se mezclan tres clases de vino de las siguiente manera:

a) 5 litros de Tenerife, 6 de Las Palmas y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 céntimos de euro el litro.

b) 1 litro de Tenerife, 3 de las Palmas y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 céntimos de euro el litro.

c) 3 litros de Tenerife, 6 de las Palmas y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 céntimos de euro el litro.

Hallar el precio por litro de cada clase de vino.

3. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51,5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

4. Resuelve el sistema:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ 2x-y=1 \\ -x+2y+z=2 \end{matrix}\right\}$$

Y justifica si tiene o no las mismas soluciones que el sistema:

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ 2x-y=1 \end{matrix}\right\}$$

Hoja 2

1. Resuelve.

a) $\begin{Bmatrix} x+y+z=3 \\ 2x-3y+2z=1 \\ 4x-2y+z=3 \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} x-y-2z=-1 \\ 2x+3y+4z=4 \\ 5x-y+3z=16 \end{Bmatrix}$

2. Resuelve.

a) $\begin{Bmatrix} x+y+z=3 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+2z=3 \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} x+2y-3z=0 \\ 2x-3y+z=1 \\ 2x+4y-6z=5 \end{Bmatrix}$

3. Resuelve.

a) $\begin{Bmatrix} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} x-2y+z=0 \\ 2x-3y-2z=-10 \\ -x+3y+2z=1 \\ 2x-5y+7z=13 \end{Bmatrix}$

4. Determinar, en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, si el siguiente sistema tiene solución única, infinita soluciones o no tiene solución.

$$\begin{Bmatrix} x+y+z=k \\ x+(k+1)y+z=2k \\ x+y+(k+1)z=0 \end{Bmatrix}$$

Hoja 3

1. Determinar, en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$, si el siguiente sistema tiene solución única, infinita soluciones o no tiene solución.

$$\begin{Bmatrix} 2x+y+kz=4 \\ x+z=2 \\ x+y+z=2 \end{Bmatrix}$$

2. Determinar, en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$, si el siguiente sistema tiene solución única, infinita soluciones o no tiene solución.

$$\begin{Bmatrix} 2\mathrm{y}-z=k \\ 3\mathrm{x}-2\mathrm{z}=11 \\ y+z=6 \\ 2\mathrm{x}+y-4\mathrm{z}=k \end{Bmatrix}$$

3. Un cliente ha comprado en un supermercado botellas de agua de medio litro, 2 litros y 5 litros, cuyos precios respectivos son 0,5 euros, 1 euro y 3 euros. En total ha comprado 24 botellas, que corresponden a una cantidad de 36 litros, y que le han costado 22 euros. Determinar cuántas botellas de cada tipo ha comprado.

4. María y Luis han realizado un desplazamiento en coche que ha durado 13 horas y durante el cual, un tiempo ha conducido María, otro ha conducido Luis y el resto han descansado. Luis ha conducido 2 horas más de las que han descansado, y el total de horas de descanso junto con las de conducción de Luis es 1 hora menos que las que ha conducido María. Encontrar el número de horas que ha conducido cada uno y las que han descansado.

5. Tres familias han comprado naranjas, manzanas y melocotones. La familia A ha comprado 1 kg de cada fruta y ha pagado 10 euros, la familia B ha pagado 24 euros por 2kg de naranjas y 4 kg de melocotones, y la familia C se ha llevado 3 kg de manzanas y 3 kg de melocotones y ha pagado 24 euros. Calcular el precio de 1 kg de cada una de las frutas.

6. Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

7. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple que el número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

Hoja 4

1. La suma de las tres cifras de un número es 6 y si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcular dicho número.

2. Tres jugadores convienen que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con veinte euros. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

3. En una compañía envasan los bombones en cajas de 250 gr, 500 gr y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 gr) que de tamaño mediano (500 gr). Sabiendo que el precio del kilo de bombones es de 40 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1250 euros, ¿cuántas cajas se han envasado de cada tipo?

4. Encontrar tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

5. Pedro se ha comprado en las rebajas, por 142 euros, un suéter, unos pantalones y unos zapatos. El suéter estaba rebajado un 20 %, los pantalones un 15% y los zapatos un 50 %, respecto a sus precios originales. Antes de las rebajas, los pantalones valían un 20% más que el suéter y con la rebaja los pantalones y los zapatos le han costado lo mismo. Calcule los precios originales de las tres cosas.

6. En un estudio de mercado, se eligen tres productos, A, B y C y cuatro tiendas. En la primera, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4.25 euros. En la segunda, 2 unidades de A y 3 de C valen 8.25 euros más que una unidad de B. En la tercera, una unidad de A y 2 de C valen 4 euros más que 2 unidades de B y, en la cuarta, una unidad de B vale 1.25 euros menos que una de C.

¿Tienen A, B y C el mismo precio en las cuatro tiendas o no?

Si la respuesta es no, justifique por qué y si la respuesta es sí, diga cuál es ese precio.

7. El precio de la pensión completa en una residencia es de 30 euros por persona y día. A los niños menores de 10 años se les cobra el 50% y a las personas mayores de 65 el 70% de ese precio. Determine el número de niños de menos de 10 años y de personas mayores de 65 que había cierto día en la residencia, si se sabe que: había 200 personas, el número de mayores de 65 era igual al 25% del número de niños y se recaudaron 4620 euros por las pensiones completas de todas ellas.

8. Por 9 entradas de Butaca de Patio (BP), 6 de Anfiteatro I (AI) y 9 de Anfiteatro II (AII) ha pagado 480 euros. A otra persona le han cobrado 140 euros por 4 de AI y 6 de AII y una tercera persona paga 160 euros por 3 de BP, 2 de AI y 3 de AII.

a) Determine, sólo con estos datos, el precio de las Butacas de Patio. b)

¿Puede determinar el precio de las entradas de Anfiteatro I y II?.

c) Si le dicen que el precio de las de Anfiteatro I es el doble que el de las de Anfiteatro II, ¿podría entonces determinar esos precios? Si la respuesta es sí determínelos.

Hoja 5

1. Un examen de matemáticas, que consta de 30 preguntas, se califica del siguiente modo: cada respuesta correcta suma 1 punto y cada respuesta equivocada resta medio punto (las preguntas no contestadas ni suman ni restan puntos). Un alumno ha obtenido 17,5 puntos y tiene tantas respuestas equivocadas como no contestadas. Determine el número de respuestas correctas y equivocadas de este alumno.

2. El presupuesto para muebles de un Instituto es cinco veces la suma del de libros más el de material de oficina. El presupuesto para libros es el triple del de material de oficina. La suma de lo presupuestado para muebles y material de oficina es 7 veces lo destinado a libros.

a) ¿Puede saber con estos datos el dinero destinado a cada una de las tres cosas? Justifique su respuesta.
b) Determine las tres cantidades, sabiendo que para libros hay 3000 euros.

3. En el supermercado, por 2 litros de leche, 2 barras de pan y 1 Kg. de azúcar le cobraron un día 4,90 euros y otro día, por 1 litro de leche, 1 barra de pan y 1 Kg. de azúcar pagó 3,20 euros.

a) ¿Puede determinar con estos datos los precios de la barra de pan, el litro de leche y el Kg. de azúcar? ¿Y alguno de ellos?

b) Si un tercer día le piden 5,40 pesetas por tres litros de leche y tres barras de pan, ¿puede estar seguro de que alguno de los tres días se han equivocado al hacer la cuenta?

4. Antonio tiene un año más que Juan y Luis uno más que Angel. Determine la edad de los cuatro sabiendo que la edad de Luis es la suma de la tercera parte más la séptima parte de la edad de Antonio y que la edad de Angel es la suma de la cuarta parte más la quinta parte de la edad de Juan.

5. El Sr. García deja a sus hijos herederos de todo su dinero con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media de lo que les deja a los otros dos más 30000 euros, al mediano exactamente la media de lo de los otros dos y al pequeño la media de lo de los otros dos menos 30000 euros. Conociendo esta condiciones solamente, ¿pueden los hijos saber cuánto dinero ha heredado cada uno?

6. En cierta heladería por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos le cobran 34 euros un día. Otro día por 4 copas de la casa y 4 horchatas le cobran 44 euros y un tercer día le piden 26 euros por una horchata y cuatro batidos. ¿Tiene usted motivos para pensar que alguno de los tres días le han presentado una cuenta incorrecta?

7. Sea N un número de tres cifras, se forman con N los números: N' obtenido restando una unidad a cada una de las cifras de N, N" obtenido intercambiando la cifras de las unidades y centenas de N' y, finalmente, M obtenido intercambiando en N las cifras de las unidades y de las decenas. Sabiendo que N" - N = 87 , M - N = 27 y que la suma de las cifras de N es 10, encontrar N.

Hoja 6

1. Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza el capitán promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo, el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados. Sabiendo que si el primero que se sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo los restantes reciben un tercio de escudo y si el primero es sajón un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?.

2. Un número verifica:

a) La suma de sus cifras es 24 .

b) La diferencia entre las cifras centenas y las decenas es 1.

c) Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas el número disminuye en 198 unidades.

Obtener el número.

3. Un joyero tiene monedas de tres clases: A, B y C. Las monedas del tipo A tienen un gramo de oro, dos de plata y siete de cobre; las del tipo B tienen tres gramos de oro, dos de plata y cinco de cobre, finalmente, las del C tienen cuatro gramos de oro, tres de plata y tres de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener una moneda de 22 gramos de oro, 22 de plata y 56 de cobre?

4. Una tienda posee tres tipos de conservas cárnicas A, B y C. Un cliente compra el primer mes 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, teniendo que abonar 840 euros. Al mes siguiente compra 20 unidades de A y 25 de C y abona 690 euros. Sabiendo que el precio medio de los tres productos es 15 euros, encontrar el precio de cada una de las unidades.

5. Resolver.

$$\left\{\begin{matrix} x+y-2z=9 \\ 2x-y+6z=-1 \\ 2x-y+4z=4 \end{matrix}\right\}$$

6. Discutir y resolver según los valores de m.

$$\left\{\begin{matrix} x+2y+z=1 \\ -x+2z=3 \\ 3x+2y+mz=1 \end{matrix}\right\}$$

Hoja 7

1. Discutir y resolver según los valores de k.

$$\left\{\begin{array}{c} -x+ky+z=2 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x-3z=-2 \end{array}\right\}$$

2. Discutir y resolver según los valores de k.

$$\left\{\begin{array}{c} x+ky-z=1 \\ 2x+y-kz=2 \\ x-y-z=k-1 \end{array}\right\}$$

3. Discutir y resolver según los valores de k.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+kz=1 \\ 2x+z=2 \end{array}\right\}$$

4. Discutir y resolver según los valores de k.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x-y=k \\ kx+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\}$$

5. Discutir y resolver según los valores de k.

$$\left\{\begin{array}{c} kx+y+z=4 \\ x-ky+z=1 \\ x+y+z=k+2 \end{array}\right\}$$

6. Discutir y resolver según los valores de a .

$$\left\{\begin{array}{c} 5x-11y+9z=a \\ x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \end{array}\right\}$$

7. Discutir y resolver según los valores de a .

$$\left\{\begin{array}{c} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\}$$

Hoja 8

1. Resuelve.

a) $\begin{Bmatrix} x+3y-2z=-7 \\ 2x-3y+z=-3 \\ 3x+3z=6 \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} x+2y-3z=2 \\ -x-3y+z=5 \\ -3x-10y+z=10 \end{Bmatrix}$

2. Resuelve.

a) $\begin{Bmatrix} x-3y+2z=1 \\ -2x+y+2z=-4 \\ x-8y+8z=-1 \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} 2x+2y-6z=0 \\ 3x-2y-4z=5 \end{Bmatrix}$

3. Resuelve.

a) $\begin{Bmatrix} 3x+3y=-3 \\ 2x-5y=26 \\ 4x+3y=0 \\ x-2y=11 \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} 2x-y+z=1 \\ -x+3y-z=2 \\ 4x+13y-z=17 \end{Bmatrix}$

4. Discute la solución en función del parámetro a .

$\begin{Bmatrix} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{Bmatrix}$

Hoja 9

1. Resuelve.

a) $\begin{cases} 3x-2y-z=11 \\ x+2y-2z=7 \\ -3x-y-2z=-13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases}$

2. Discute la solución en función del parámetro a .

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-14 \\ 3x-y-z=-4 \\ 4x-y-5z=a \end{cases}$$

3. Discute la solución en función del parámetro a .

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2-2a+2 \end{cases}$$

4. Discute la solución en función del parámetro a .

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+y+z=a \\ y-az=2 \end{cases}$$

5. Discute la solución en función del parámetro a .

$$\begin{cases} x+2y-z=a \\ -x+y+2z=1 \\ 3x-y+az=2a \end{cases}$$

Hoja 10

1. Discute la solución en función del parámetro a .

$$\begin{Bmatrix} x-ay+z=0 \\ x+y+z=2 \\ -ax+2y-z=2a+1 \end{Bmatrix}$$

2. Discute la solución en función del parámetro a .

$$\begin{Bmatrix} x+ay+z=1 \\ x+ay-az=a \\ 2x+y+2z=-1 \end{Bmatrix}$$

3. Discute la solución en función del parámetro λ .

$$\begin{Bmatrix} x-y+z=1 \\ 2x+y+\lambda z=\lambda \\ x+y-\lambda z=0 \end{Bmatrix}$$

4. Discute la solución en función del parámetro λ .

$$\begin{Bmatrix} x+y+z=\lambda \\ x-y+\lambda z=1 \\ 2x+\lambda y+z=\lambda \end{Bmatrix}$$

5. Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema. Resolverlo para los valores de k que hacen el sistema compatible indeterminado.

$$\begin{Bmatrix} 2x-y=4 \\ -x+\frac{1}{2}y=-2 \\ x+ky=2 \end{Bmatrix}$$

6. Estudiar el sistema según el parámetro k . Resolverlo para los valores de k que hacen el sistema compatible indeterminado.

$$\begin{Bmatrix} x+y+z=k-1 \\ 2x+y+kz=k \\ x+ky+z=1 \end{Bmatrix}$$

Hoja 11

1. En un estudio de mercado, se eligen tres productos, A, B y C y cuatro tiendas. En la primera, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4.25 euros. En la segunda, 2 unidades de A y 3 de C valen 8.25 euros más que una unidad de B. En la tercera, una unidad de A y 2 de C valen 4 euros más que 2 unidades de B y, en la cuarta, una unidad de B vale 1.25 euros menos que una de C. ¿Tienen A, B y C el mismo precio en las cuatro tiendas o no? Si la respuesta es no, justifique por qué y si la respuesta es sí, diga cuál es ese precio.

2. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+m\cdot y+z=-1 \end{Bmatrix}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$.

3. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} 2a\cdot x+(a^2+a-2)y+2z=2 \\ a\cdot x-y+2z=0 \\ -a\cdot x+y-z=a \end{Bmatrix}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=-1$.

4. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} x+y+z=1 \\ x-a\cdot y+z=1 \\ a\cdot x+y+z=4 \end{Bmatrix}$

a) Resolver cuando el sistema sea compatible indeterminado, según el valor de $a\in\mathbb{R}$.

b) Inventa y resuelve un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que sea compatible indeterminado.

Hoja 12

1. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51.5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

2. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} a\cdot x+7y+5z=0 \\ x+a\cdot y+z=3 \\ y+z=-2 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$.

c) Resolver el sistema, si es posible, para $a=2$.

3. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x-y+m\cdot z=0 \\ m\cdot x+2y+z=0 \\ -x+y+2m\cdot z=0 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=-2$.

4. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} a\cdot x+(2a+1)y-az=1 \\ a\cdot x+y-a\cdot z=-2b \\ a\cdot y+(1-a)z=b \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor de los parámetro $a,b\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

c) Para $a=-1$ y $b=0$ el sistema es compatible determinado. Añadir una cuarta ecuación para que el nuevo sistema sea incompatible.

Hoja 13

1. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación $A \cdot X = B$

2. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación $X \cdot A + B = C$

3. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación:

a) $X \cdot A = B + I$

b) $A X + B X = C$

c) $X A B - X C = 2C$

4. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Resolver la ecuación $A X + 2B = 3C$