Problemas – Tema 9

Enunciados de problemas sobre geometría tridimensional

Hoja 1

1. Dada la recta $r:\begin{Bmatrix} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{Bmatrix}$ y el plano $\Pi: 2x-y+az=0$.

a) Calcular a para que la recta y el plano sean paralelos.

b) Obtener un plano perpendicular a la recta que pase por el origen de coordenadas.

2. Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ que equidiste de los planos $\Pi_1: 3x+4y-1=0$ y $\Pi_2: 4x-3y+9=0$.

3. a) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(2,3,-1)$ y es paralela a los planos $\Pi_1: 2x-y+3z-1=0$ y $\Pi_2: x+y-2z+3=0$.

b) Encuentra el punto $Q\in r$ que está en el plano $x=0$.

4. Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(-1,5,6)$ y corta a las rectas $s:\begin{Bmatrix} x+y+z+1=0 \\ 3x+y-z-8=0 \end{Bmatrix}$ y $t:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$.

5. a) Para qué valor del parámetro a la recta $r:\begin{Bmatrix} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{Bmatrix}$ es perpendicular al plano $\Pi: -6x+ay+2z=0$.

b) Demuestre que si $a=-8$ la recta r corta al plano Π en un punto. Calcular dicho punto de corte.

6. Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos $A(1,1,1)$ y $B(1,1,3)$. El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos $P(-1,0,2)$ y $Q(0,0,2)$.

a) Determinar la ecuación de la recta r .

b) Calcular el punto C para que el área del triángulo sea igual a $\sqrt{15}\,u^2$.

Hoja 2

1. Dados el plano $\Pi: 2x-y=2$ y la recta $r: \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$ se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta y el plano.

b) Determinar el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a Π .

c) Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r y es paralela a Π .

2. Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\Pi: x+5y-6z=1$ y la recta $r: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ se pide:

a) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de Π .

b) Hallar la distancia de P a r .

3. Halla un punto P de la recta $r: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ que no sea coplanario con los puntos $A(2,1,4)$, $B(1,2,2)$ y $C(1,1,2)$.

4. Consideremos los puntos $A(2,6,-3)$ y $B(3,3,-2)$.

a) Halla la ecuación de la recta que contiene a ambos puntos.

b) Determina una ecuación para el plano equidistante de ambos puntos.

5. Determina el valor de a para que la recta $r: \begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\Pi: x-ay+10z=-3$.

6. Dados los puntos $A(-1,0,3)$, $B(2,4,1)$ y $C(-4,3,1)$:

a) Estudiar sin los tres puntos están alineados.

b) Hallar la ecuación de la recta paralela al segmento $\overline{AB}$ y que pasa por C . Expresar la recta como intersección de dos planos.

7. Calcula la ecuación continua de la recta paralela al plano $\Pi: 2x-2y+5z=3$ y perpendicular a la recta $r: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ que pasa por el punto $P(-1,2,0)$.

Hoja 3

1. Determina el punto (o los puntos) de la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$ que equidistan de los planos $\Pi_1: x+y+z+3=0$ y $\Pi_2:\left\{\begin{array}{l} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{array}\right\}$.

2. Define el producto vectorial de dos vectores. Dados los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ y $\vec{v}=(1,1,-1)$, calcula los vectores unitarios y perpendiculares a los dos vectores.

3. Calcula el valor de a para que la recta $r:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\Pi: 5x+ay+4z=5$. Para ese valor de a calcula la distancia de la recta al plano.

4. a) Calcula el punto simétrico de $P(-2,0,2)$ respecto al plano $\Pi: 3x+2y+z-3=0$.

b) Sea r la recta perpendicular al plano $\Pi: 3x+2y+z-3=0$ y que pasa por el punto $P(-2,0,2)$. Sea la recta $s:\left\{\begin{array}{l} 2x-y-3z=0 \\ x-z-10=0 \end{array}\right\}$. Estudia la posición relativa de ambas rectas. Calcula la ecuación del plano paralelo a s que contiene a r .

5. Dado el plano Π_1 de ecuación $z=0$, escriba la ecuación de los planos Π_2 y Π_3 tales que los tres planos se corten dos a dos pero no exista ningún punto comón a los tres.

6. Considere la rectas $r:\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$ y $s:\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$.

a) Obtener un vector director de la recta s .

b) Obtener el plano que contiene a r y es paralelo a s .

c) Obtener el plano que contiene a r y es perpendicular a s .

Hoja 4

1. Sea el triángulo de vértices $A(1,2,-2)$, $B(0,-3,1)$ y $C(-1,0,0)$ y los planos $\Pi_1 : x+y+z+1=0$ y $\Pi_2 : \left\{ \begin{array}{c} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{array} \right\}$.

a) Obtener la posición relativa de Π_1 y del plano que contiene al triángulo.

b) Obtener un vector $\vec{n}_1$ perpendicular al plano Π_1 y un vector $\vec{n}_2$ perpendicular al plano Π_2 . Obtener el coseno del ángulo formado por ambos vectores.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de ambos planos.

2. Sean los puntos $A(-1,0,2)$ y las rectas $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$, $s : \left\{ \begin{array}{c} x=-1-2\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=1+\lambda \end{array} \right\}$.

a) Obtener la ecuación del plano que pasa por A y contiene a la recta r .

b) Obtener la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta s .

c) Obtener la recta intersección de los planos obtenidos en los dos apartados anteriores.

3. Sean las rectas $r : \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ y $s : (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$.

a) Comprobar que los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo situado sobre la recta r y el otro punto situado sobre la recta s forman un plano.

b) Hallar la ecuación general del plano del apartado anterior.

4. Sea el punto $A(1,2,3)$.

a) Calcular el punto simétrico del punto A respecto de la recta de ecuación $r : (x, y, z) = (3+\lambda, 1, 3-\lambda)$.

b) Calcular el punto simétrico del punto A respecto del plano $\Pi : x+y+z=3$.

5. Calcular la recta contenida en el plano $\Pi_1 : x+y+z=3$ paralela al plano $\Pi_2 : x=0$ y que pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 .

6. Sea el plano que pasa por los puntos $A(1,-1,1)$, $B(2,3,2)$, $C(3,1,0)$ y sea la recta dada por $r : \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

a) Calcular el ángulo que forma la recta y el plano.

b) Calcular los puntos de la recta que distan 6 unidades del plano.

Hoja 5

1. Dado el plano $\Pi: x-y=4$ y la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+z=1 \\ 2x+y+az=0 \end{matrix}\right\}$, con $a\in\mathbb{R}$. Se pide:

a) Estudiar si existe algún valor del parámetro a para que la recta y el plano sean paralelos.

b) Estudiar si existe algún valor del parámetro a para que la recta y el plano se corten perpendicularmente.

2. a) Halla $a\in\mathbb{R}$ para que las rectas $r:\left\{\begin{matrix} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{matrix}\right\}$ y $s:\left\{\begin{matrix} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{matrix}\right\}$ se corten en un punto.

b) Para dicho valor de a obtener la ecuación implícita de un plano que contenga a ambas rectas.

3. Sea la recta $r:\left\{\begin{matrix} 3x-2y-11=0 \\ 2x-y-z-5=0 \end{matrix}\right\}$ y los puntos $A(0,1,1)$ y $B(1,2,1)$.

a) Halla un punto de la recta que equidiste de los puntos $A\,y\,B$.

b) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y al punto A .

c) Determina la distancia del punto B al plano del apartado anterior.

4. Sea el plano $\Pi: ax+2y-4z-23=0$ y la recta $r:\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=z+3$.

a) Halla el valor de a para que la recta esté contenida en el plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el que la recta r sea perpendicular al plano Π ?

c) Para $a=1$ calcula la ecuación general del plano Π_1 que es perpendicular al plano Π y que contiene a la recta r .

5. Se consideran los puntos en el espacio $A(0,-1,2)$, $B(2,2,3)$ y $C(0,0,3)$.

a) Halla la ecuación general o implícita del plano que pasa por los tres puntos.

b) Obtener una recta perpendicular al plano del apartado anterior y que pase por A .

6. Considera el punto $P(-1,0,1)$ y el plano $\Pi: x-y+z+2=0$. Calcule:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano Π .

b) La distancia del punto P al plano Π .

Hoja 6

1. Sean las rectas $r:\begin{Bmatrix} 2x-4z=2 \\ x+y+z=1 \end{Bmatrix}$ y $s:\frac{x}{2}=\frac{y+2}{a}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$.

a) Determina la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a .

b) Si $a=2$ determina el ángulo entre ambas rectas.

2. Dados el punto $P(1,-1,0)$ y la recta $s:\begin{Bmatrix} -2x+z-1=0 \\ 3x-y-3=0 \end{Bmatrix}$.

a) Determine la ecuación general del plano $Ax+By+Cz+D=0$ que contiene al punto P y la recta s .

b) Determine el ángulo que forman el plano $\Pi: 2x+y-z+1=0$ y la recta s .

3. Sea r la recta definida por $r:\begin{Bmatrix} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{Bmatrix}$.

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicular a r en el punto $(1,1,0)$.

4. Sea la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.

a) Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2,3,2)$.

b) Calcula la distancia de r y s .

Hoja 7

1. Sea la recta r que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector director $(a,2a,1)$ y sea la recta s dada por $s:\begin{cases}-2x+y=-2\\ -ax+z=0\end{cases}$.

a) Calcula los valores de a para que las rectas r y s sean paralelas.

b) Para $a=1$ calcula la distancia entre las rectas r y s .

2. Sean los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.

a) Halla la ecuación del plano Π respecto el cual ambos puntos son simétricos.

b) Calcula la distancia de P a Π .

3. a) ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? Justifica la respuesta.

b) Determina todos los vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z-2=0\end{cases}$.

4. Dadas las rectas $r:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ y $s:\begin{cases}x=-\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=-2+2\lambda\end{cases}$.

a) Determine su posición relativa.

b) Calcule la distancia del punto $P(2,3,1)$ a la recta s .

5. Sea el punto $P(-1,2,0)$ y el plano $\Pi:2x-3y+z=8$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto y sea perpendicular al plano.

b) La distancia d del punto al plano.

c) La ecuación de otro plano, paralelo a Π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d calculada en el apartado anterior.

6. Sean los puntos $A(1,-1,1)$ y $B(2,2,2)$.

a) Hallar el punto medio de A y B .

b) Obtener el plano respecto del cual ambos puntos son puntos simétricos.

Hoja 8

1. Los puntos $A(1,3,1)$ y $B(2,1,3)$ son dos vértices consecutivos de un cuadrado. Los otros dos vértices del cuadrado pertenecen a una recta r que pasa por el punto $P(2,7,0)$.

a) Calcula la ecuación de la recta r .

b) Determina la ecuación general del plano Π que contiene al cuadrado.

c) Calcula las coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

2. Sea la recta $r: \frac{x-5}{-1}=y-2=z$ y la recta s que pasa por los puntos $A(1,6,6)$ y $B(4,c,5)$.

a) Determina el valor del parámetro c para que las rectas r y s se corten. Halla el punto de corte P .

b) Calcula la ecuación general del plano Π que contiene a las dos rectas r y s .

c) Halla el coseno del ángulo que forman las rectas r y s .

3. a) Estudia la posición relativa del plano $\Pi: x-y-z=a$ y la recta $r: \begin{Bmatrix} 2x+y+az=0 \\ x-2y=0 \end{Bmatrix}$ en función del parámetro a .

b) Calcula la distancia entre el plano y la recta en función del parámetro a .

4. a) Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{Bmatrix} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{Bmatrix}$ y $s: \begin{Bmatrix} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{Bmatrix}$.

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

5. Dado el punto $P(1,1,3)$ y la recta $r: \begin{Bmatrix} 2x-y-2z+3=0 \\ x-y+4=0 \end{Bmatrix}$ .Encuentra la ecuación general del plano Π perpendicular a la recta y que cumple $d(P,\Pi)=3$.

6. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A=(1,3,-4)$, $B=(2,6,7)$ y $C(5,-1,2)$.

a) Calcula el área del paralelogramo.

b) Determina el cuarto vértice D .

7. Sea el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\Pi: 2x-y+z+1=0$ y la recta $r: \begin{Bmatrix} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{Bmatrix}$.

a) Determinar el plano que pasa por P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano Π .

b) Hallar el ángulo entre r y Π .

Hoja 9

1. Sea el punto $P(1,0,2)$ y la recta $r:\left\{\begin{matrix} 2x-y-4=0 \\ y+2z-8=0 \end{matrix}\right\}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

b) Calcula el punto simétrico del punto respecto de la recta.

2. De un paralelogramo de vértices consecutivos $A(2,-1,0), B(-2,1,0)\, y\, C(0,1,2)$, calcula:

a) La ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

b) El áreal del paralelogramo.

c) El cuarto vértice D .

3. Sean los planos $\Pi_1: x+y=1$, $\Pi_2: ay+z=0$, $\Pi_3: x+(1+a)y+az=a+1$.

a) Cuánto debe valer a para que no tengan ningún punto en común?

b) Para $a=0$ determina la posición relativa de los planos.

4. Sea la recta $r:\left\{\begin{matrix} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{matrix}\right\}$.

a) Determina el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$.

b) Halla los puntos de la recta cuya distancia al origen sea de 4 unidades.

5. Sea la recta $r:\left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{matrix}\right\}$ y la recta $s:\left\{\begin{matrix} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{matrix}\right\}$. Hallar la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

6. Sea el punto $P(1,0,0)$, la recta $r: x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y la recta $s:(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas.

b) Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s .

Hoja 10

1. Sea el punto $A(1,-2,1)$ y la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{matrix}\right\}$.

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por A .

b) Calcula la distancia del punto A a la recta r .

2. Sea la recta $r: mx=y=z+2$ con $m\neq 0$, y la recta $s:\frac{x-4}{4}=y-1=\frac{z}{2}$.

a) Halla el valor de m para que las rectas sean perpendiculares.

b) ¿Existe algún valor de m para el que las rectas sean paralelas?

3. Se sabe que las rectas $r:\left\{\begin{matrix} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=b+t \end{matrix}\right\}$ y $s:\left\{\begin{matrix} x-y+z=3 \\ 6x+2z=2 \end{matrix}\right\}$ están contenidas en un mismo plano.

a) Calcula b .

b) Halla la ecuación delplano que contiene a ambas rectas.

4. Sea el punto $A(0,-3,-1)$, el plano $\Pi: 2x-2y+3z=0$ y la recta $r: x+3=y=\frac{z-3}{2}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r .

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por A , es paralela a Π y corta a r .

5. Sean los planos $\Pi_1: x+y+z=1$, $\Pi_2: x-y+z=2$, $\Pi_3: 3x+y+3z=5$.

a) ¿Se cortan $\Pi_1 y \Pi_2$?

b) ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

6. Determina todos los puntos del plano $\Pi: 2x-y+2z-1=0$ que equidistan de los puntos $A(3,0,-2) y B(1,2,0)$.

7. Sea el plano $2x+y+2z-4=0$.

a) Halla el area del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

b) Calcula la distancia del origen al plano dado.