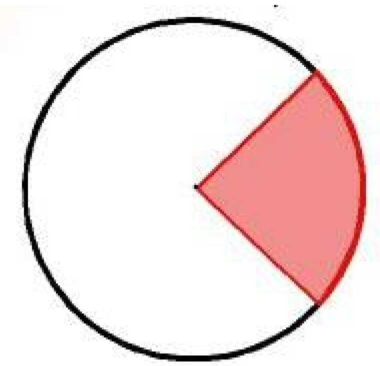
Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 12 - Problemas 3, 5

Hoja 12. Problema 3

Resuelto por Manuel López de la Torre (octubre 2014)

3. Un jardinero desea construir un jardín con forma de sección circular de 40 metros de perímetro. ¿Cuál debe ser el radio para que la superficie sea máxima?



Nos encontramos ante un problema de maximizar el área del sector circular.

El área de un círculo es $A_{círculo}=\pi\cdot r^2$, por lo que el área proporcional de un sector circular de ángulo α radianes será $A_{sector}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot\alpha}{2\pi}=\frac{r^2\cdot\alpha}{2}$

Aquí podemos recordar que la longitud l del arco sostenido por el sector circular es $l=r\cdot\alpha$ (con α en radianes), por lo que el área quedaría $A_{sector}=\frac{r\cdot l}{2}$.

Con cualquiera de las dos maneras de representar el área del sector circular, llegamos a una función que depende de dos variable.

El perímetro del sector circular podemos exprsarlo como $P_{sector}=2r+l$ y el enunciado nos dice que este perímetro es igual a 40 metros. Por lo tanto:

$$40=2r+l \quad\rightarrow\quad l=40-2r$$

Llevamos este resultado a $A_{sector}=\frac{r\cdot l}{2} \rightarrow A_{sector}=\frac{r\cdot(40-2r)}{2}=20r-r^2$

Y esta es la función a maximizar, derivando en función del radio r .

$$A'_{sector}=20-2r \quad , \quad A'_{sector}=0 \quad \rightarrow \quad r=10$$

Con la segunda derivada verificamos que este punto crítico es un máximo relativo de la función área.

$A''_{sector}=-2<0 \quad \rightarrow \quad r=10$ es un máximo relativo

Y el valor de este área máxima resulta:

$$A_{sector}(r=10)=20\cdot 10-10^2=100\,m^2$$

Hoja 12. Problema 5

Resuelto por Ignacio Roldán Ortiz (septiembre 2014)

5. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$ **.**

El dominio de la función son todos los números reales excepto donde se anula el denominador.

$$D(f)=R-\{-1,1\}$$

Si encontramos límites donde $\lim_{x\to a} f(X)=\infty$, entonces la recta $x=a$ es una asíntota vertical. Estudiamos los límites laterales alrededor de los puntos donde en está definida la función.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \ , \ \lim_{x\to -1^-} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \ \rightarrow \text{asíntota vertical en } x=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \ , \ \lim_{x\to 1^+} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \ \rightarrow \text{asíntota vertical en } x=1$$

Si encontramos límites donde $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$, entonces la recta vertical $y=k$ es una asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{1-\infty}{\infty-1}=\frac{-\infty}{\infty}$$

Dividimos por la máxima potencia x^2 $\rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=-2$ $\rightarrow$ asíntota horizontal $y=-2$

Al existir asíntota horizontal, no existen oblicuas.

Gráfica de $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ *, asíntotas horizontales y verticales*