Problemas – Tema 1

Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 13 - Problemas 1, 2, 3

Hoja 13. Problema 1

Resuelto por Gabriel Manzano Montes (octubre 2014)

1. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$.

Los candidatos a asíntotas verticales son los valores que anulan el denominador: $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\sqrt{5}}{0-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\sqrt{5}}{0+}=+\infty$$

La asíntota horizontal se calcula estudiando a convergencia de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\infty}{\infty}\to indeterminación \frac{\infty}{\infty}$$

Se resuelve esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por la variable elevada al mayor exponente (x).

Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite tenderá a infinito. Si el grado del numerador es menor que grado del denominador el límite es cero. Si el grado del numerador es igual al grado del denominador el límite será el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado.

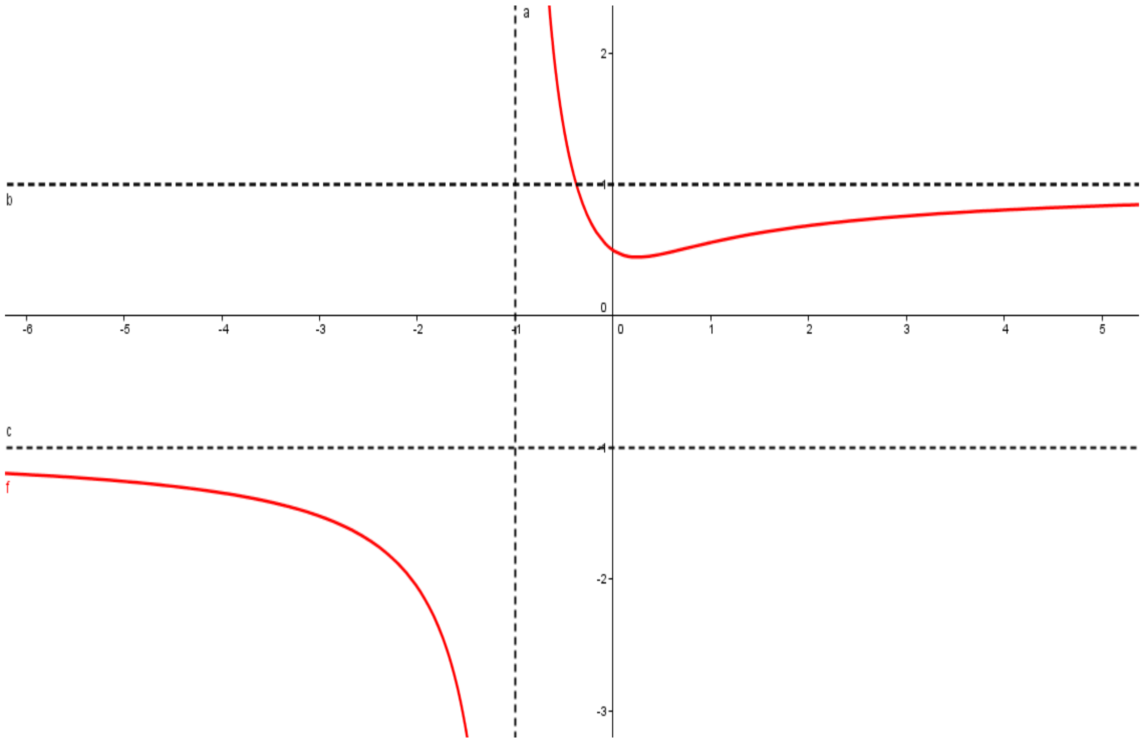
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x}+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{4+0}}{2+0}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=-1$$

Llegamos a la conclusión de que existen dos asíntotas horizontales: $y=\pm 1$.

Al existir asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas.

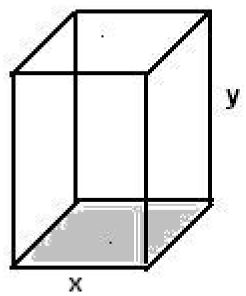
Gráfica de $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$ *y asíntotas*



Hoja 13. Problema 2

Resuelto por Pablo Martínez Peregrina (septiembre 2014)

2. Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su superficie sea mínima (menor coste de fabricación)?



La función que tenemos que minimizar es el área del depósito. Es decir, el área de la base más el área de las cuatro caras laterales (al tener la tapa abierta).

$$A = x^2 + 4\,x\,y$$

Con la condición de que el volumen sea de 4000 litros. Y el volumen será el área de la base por la altura, es decir:

$$\begin{aligned} V &= x^2\,y \\ 4000 &= x^2\,y \\ y &= \frac{4000}{x^2} \end{aligned} \rightarrow \text{Variables } x\,,y \text{ en } dm \rightarrow 1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1000\,litros$$

Llevando este valor a la función área tenemos todo expresado en función de una sola variable.

$$A = x^2 + \frac{16000}{x}$$

Para minimizar, derivamos e igualamos a cero.

$A'=2x-\frac{16000}{x^2}$, $A'=0$ $\rightarrow$ $x=20$ → punto crítico

Demostremos que el punto crítico es un extremo evaluando la segunda derivada.

$A''=2+\frac{32000}{x^3}$

$A''(20)>0$

$x=20\,dm$ → es un mínimo relativo → $y=10\,dm$ → Área mínima → $A=1200\,dm^2$

Hoja 13. Problema 3

Resuelto por Pablo Martínez Peregrina (septiembre 2014)

2. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se estima que por cada árbol adicional, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

$$Produccion\ actual: 24\cdot 600=14400\ frutos$$

Por cada árbol nuevo (x) la producción en frutos de un árbol disminuye $15x$ frutos. Por lo tanto la producción total será el número de árboles ($24+x$) multiplicado por el número de frutos de cada árbol ($600-15x$).

$$P(x)=(24+x)(600-15x)=-15x^2+240x+14400$$

¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? Derivamos la función e igualamos a cero.

$$P'(x)=-30x+240 \rightarrow -30x+240=0 \rightarrow x=8 \ \rightarrow \text{punto crítico}$$

$$P''(x)=-30<0 \rightarrow x=8\ es\ máximo\ relativo$$

La producción máxima acontece para una huerta de 32 árboles ($24+8$).

$$P(8)=(24+8)(600-15\cdot 8)=15.360\ frutos \rightarrow \text{producción máxima}$$