

Problemas – Tema 1

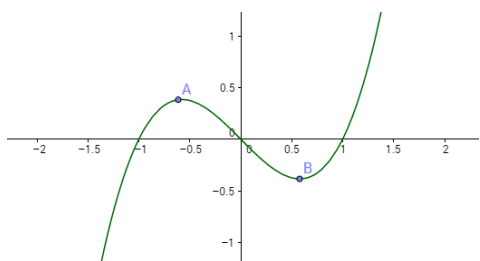
Solución a problemas de Repaso de Matemáticas I - Hoja 26 - Todos resueltos

Hoja 26. Problema 1

1. a) Calcula el número real m que cumple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)} = 3$.

b) Obtener el valor de a para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sea continua en $x=2$.

c) La siguiente gráfica muestra la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$. Viendo la gráfica, ¿qué podemos decir de los intervalos de crecimiento, decrecimiento y de los extremos relativos de la función original $f(x)$?



$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{\ln(1)}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\text{Aplicamos L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{m}{1+mx}}{2 \cdot \cos(2x)} = \frac{\frac{m}{1}}{2} = \frac{m}{2} \rightarrow \text{Igualamos el límite a } 3 \rightarrow \frac{m}{2} = 3 \rightarrow m = 6$$

b) Las condiciones de continuidad en un punto son las siguientes:

$$\exists f(2) = \ln(2-1) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + a x + a - 1) = 3 + 3a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-1) = 0 \rightarrow 3 + 3a = 0 \rightarrow a = -1$$

c) La función original $f(x)$ es estrictamente decreciente (derivada negativa) en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, y estrictamente creciente (derivada positiva) en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Existe un mínimo relativo de $f(x)$ en $x = -1$ (cambio de derivada negativa a positiva), un máximo relativo en $x = 0$ (cambio de derivada positiva a negativa), y un nuevo mínimo relativo en $x = 1$.

Hoja 26. Problema 2

2. Sea la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 - \frac{2x}{3} - 4$. Hallar los valores x de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0 = 2x + 3y - 4$.

La pendiente de las rectas tangentes que buscamos coincide con la pendiente la recta $0 = 2x + 3y - 4 \rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow \text{pendiente} = \frac{-2}{3}$. Derivamos la función e igualamos a este valor de la pendiente.

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 - \frac{2x}{3} - 4 \rightarrow g'(x) = x^2 - 8x - \frac{2}{3}, \quad g'(x) = \frac{-2}{3} \rightarrow x^2 - 8x - \frac{2}{3} = \frac{-2}{3} \rightarrow x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(x-8) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = 8$$

Hoja 26. Problema 3

3. Considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x+3=0$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

La recta normal es perpendicular a la recta tangente. Por lo que el producto de sus pendientes es igual a -1 .

La recta normal en $x=0$ es $y+x+3=0 \rightarrow y=-x-3 \rightarrow pendiente_{normal} = -1 \rightarrow$ Por lo tanto la pendiente de la recta tangente en $x=0$ es $m_{tangente} = 1$. Y sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto. Es decir:

$$f'(0) = 1$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f'(0) = b, f'(0) = 1 \rightarrow b = 1$$

En el punto $x=0$ coinciden la función y la recta normal $y+x+3=0$. Por lo que podemos obtener la imagen de la función en $x=0$ gracias a la ecuación de la recta. Es decir:

$$y = -x - 3, \text{ si } x=0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, f(0)) = (0, -3)$$

Llevamos este punto a la función, recordando que ya hemos obtenido $b=1$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + x + c \rightarrow f(0) = c, f(0) = -3 \rightarrow c = -3$$

Finalmente, si tenemos un punto de inflexión en $x=1$ la segunda derivada de la función debe anularse en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1 \rightarrow f''(x) = 6x + 2a, f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$$

Con estos valores el polinomio solución resulta $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

Hoja 26. Problema 4

4. Sea la función $f:(0,+\infty)$ y definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$.

a) Halla los extremos relativos de $f(x)$.

b) Determina la ecuación explícita de la recta tangente a la función en $x=e$.

a) La condición necesaria de extremo relativo es que la primera derivada se anule.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x) \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}, \quad f'(x)=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{punto crítico.}$$

Calculamos la segunda derivada y evaluamos en ella el punto crítico.

$$f''(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{x-(-1+x)2}{x^3}=\frac{-x+2}{x^3}, \quad f''(1)=\frac{-1+2}{1}=1>0 \rightarrow \text{por lo tanto}$$

$x=1$ es un mínimo relativo.

b) En $x=e$ la imagen resulta $\rightarrow f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1=\frac{1+e}{e}$. La derivada de la función en $x=e$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2} \rightarrow f'(e)=\frac{e-1}{e^2}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente resulta:

$$\begin{aligned} \frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e} &= \frac{e-1}{e^2} \rightarrow y = \left(\frac{e-1}{e^2}\right)x - \frac{e-1}{e} + \frac{1+e}{e} \rightarrow y = \left(\frac{e-1}{e^2}\right)x + \frac{1-e}{e} + \frac{1+e}{e} \rightarrow \\ \rightarrow y &= \left(\frac{e-1}{e^2}\right)x + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Hoja 26. Problema 5

5. a) Sea $f(x) = \text{sen}(x)$. Obtener la ecuación explícita de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

b) Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite.

$$\text{a) } x = \frac{\pi}{4} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{punto } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(x) = \text{sen}(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{pendiente } m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ecuación punto-pendiente:

$$\frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \pi}{8}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \cdot \ln x - a(x-1)}{(x-1)\ln x} \right) = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación } \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \cdot \ln x - a(x-1)}{(x-1)\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \right) = \frac{1-a}{0}$$

Las condiciones del enunciado marcan que el límite sea finito, por lo que al tener un cociente con denominador igual a 0, necesitamos que el numerador también sea nulo para que el límite no se dispare a infinito $\rightarrow a=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{2}$$

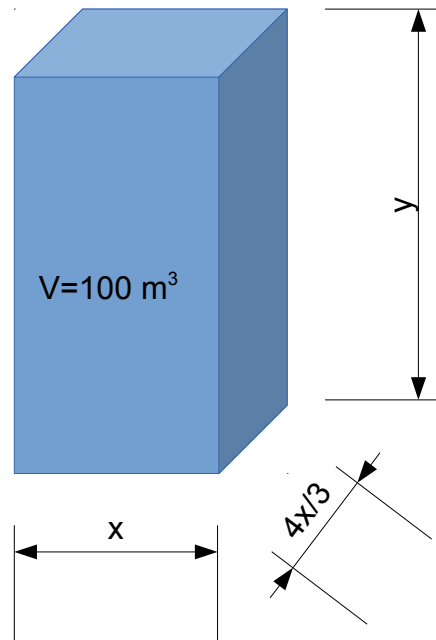
Hoja 26. Problema 6

6. Se desea construir un contenedor con forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen, de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Los precios de m^2 de pintura del suelo, del techo y de la pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2 , 300 €/m^2 y 256 €/m^2 . Determinar razonadamente las dimensiones que minimizan el coste de pintura y dicho coste mínimo.

Anchura de la base $\rightarrow x$

Largo de la base $\rightarrow \frac{4x}{3}$

Altura del paralelepípedo $\rightarrow y$



El coste de pintura de todo el contenedor es la función a minimizar.

$$P = P_{\text{base}} + P_{\text{techo}} + 2 \cdot P_{\text{pared lateral de base } x} + 2 \cdot P_{\text{pared lateral de base } \frac{4x}{3}}$$

$$P_{\text{base}} = 225 \cdot x \cdot \frac{4x}{3}$$

$$P_{\text{techo}} = 300 \cdot x \cdot \frac{4x}{3}$$

$$P_{\text{pared lateral de base } x} = 256 \cdot x \cdot y$$

$$P_{\text{pared lateral de base } \frac{4x}{3}} = 256 \cdot \frac{4x}{3} \cdot y$$

Es decir:

$$P = 225 \cdot x \cdot \frac{4x}{3} + 300 \cdot x \cdot \frac{4x}{3} + 2 \cdot 256 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 256 \cdot \frac{4x}{3} \cdot y$$

$$P = 300x^2 + 400x^2 + 512 \cdot x \cdot y + \frac{2048}{3} \cdot x \cdot y \rightarrow P = 700x^2 + 512 \cdot x \cdot y + \frac{2048}{3} \cdot x \cdot y$$

Debemos expresar la función a minimizar dependiendo de una sola variable. Usando el dato del volumen del contenedor:

$$V = x \cdot \frac{4x}{3} \cdot y \rightarrow 100 = \frac{4}{3} \cdot x^2 \cdot y \rightarrow y = \frac{300}{4x^2}$$

Sustituimos en la función precio a minimizar.

$$P = 700x^2 + 512 \cdot x \cdot \frac{300}{4x^2} + \frac{2048}{3} \cdot x \cdot \frac{300}{4x^2}$$

$$P = 700x^2 + \frac{38400}{x} + \frac{51200}{x}$$

$$P = 700x^2 + \frac{89600}{x}$$

Derivamos e igualamos a cero, como condición necesaria de extremo relativo.

$$P' = 1400x - \frac{89600}{x^2} = \frac{1400x^3 - 89600}{x^2}$$

$$P' = 0 \rightarrow 1400x^3 - 89600 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} \rightarrow x = 4 \rightarrow \text{punto crítico}$$

Comprobamos que estamos ante un mínimo relativo.

<i>Función</i> $P(x)$	$P(x) \downarrow$	$P(x) \uparrow$
<i>Intervalos</i>	$(-\infty, 4)$	$(4, +\infty)$
<i>Derivada</i> $P'(x)$	$P'(1) < 0$	$P'(10) > 0$

Por lo tanto, $x=4$ es un mínimo relativo de la función precio.

Las dimensiones del contenedor son las siguientes:

Anchura de la base $\rightarrow x=4\text{ m}$

Largo de la base $\rightarrow \frac{4x}{3} = \frac{16}{3}\text{ m}$

Altura del paralelepípedo $\rightarrow y = \frac{300}{4x^2} = \frac{300}{4 \cdot 16} = \frac{150}{32} = \frac{75}{16}\text{ m}$

Precio mínimo $\rightarrow P(4) = 700 \cdot (4)^2 + \frac{89600}{4} = 33600\text{ €}$

Hoja 26. Problema 7

7. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ un polinomio con extremo relativo en $x=1$, con punto de inflexión en $x=3$ y que pasa por el origen de coordenadas. Determinar a, b y c .

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b, f'(1)=0 \rightarrow 3+2a+b=0$$

$$f''(x)=6x+2a, f''(3)=18+2a \rightarrow 18+2a=0 \rightarrow a=-9$$

$$(0,0) \in f(x) \rightarrow f(0)=0 \rightarrow c=0$$

De la primera ecuación, si $a=-9$, resulta $\rightarrow 3-18+b=0 \rightarrow b=15$

Hoja 26. Problema 8

8. Sea la función definida por $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$. Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.

Dominio $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

Corte eje $OX \rightarrow y=0 \rightarrow 2x^2=0 \rightarrow (0,0)$

Corte eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0,0)$

Asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=2$, ya que se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{8}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Asíntota horizontal $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = 2 \rightarrow$ por se cociente de polinomios del mismo grado, el límite converge al cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia x^2 .

Existe asíntota horizontal en $y=2$, por lo que no existe oblicua.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2}{x^2 - x - 2} \rightarrow f'(x) = \frac{4x(x^2 - x - 2) - 2x^2(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 - 8x - 4x^3 + 2x^2}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-2x^2 - 8x}{(x^2 - x - 2)^2}, \quad f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 - 8x = 0$$

$$-x(2x + 8) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = -4 \rightarrow \text{puntos críticos}$$

Estudiamos el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

<i>Función</i> $f(x)$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \uparrow$	$f(x) \uparrow$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \downarrow$
<i>Intervalos</i>	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(4, +\infty)$
<i>Derivada</i> $f'(x)$	$f'(-10) < 0$	$f'(-2) > 0$	$f'(-\frac{1}{2}) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(10) < 0$

La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, -4) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$, estrictamente creciente en $(-4, -1) \cup (-1, 0)$, presenta un mínimo relativo en $x = -4$ (punto $(-4, 1.78)$) y un máximo relativo en $x = 0$ (punto $(0, 0)$).

Aunque no nos pidan la gráfica, la incluimos para comprender geoméricamente la solución.

Gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$

