# Problemas – Tema 1

# Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 04 - Problemas 1, 3, 4

## Hoja 4. Problema 1

## Resuelto por Mª Isabel Navarro-Pelayo Torres (septiembre 2014)

**1. Sea la función definida por** $f(x)=\frac{k}{(x-a)(2x-1)}$ **para** $x\neq a$ **y** $x\neq 1/2$ **.**

**a) Halla** $a$ **y** $k$ **sabiendo que la gráfica de** $f(x)$ **pasa por el punto** $(0,2)$ **y que la recta** $x=2$ **es una asíntota de dicha gráfica.**

**b) Para** $k=4$ **y** $a=2$ **, halla los extremos relativos de** $f(x)$ **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

a) Como nos dicen que pasa por el punto $(0,2)$ , sustituimos ese punto en la función que nos dan:

$$2=\frac{k}{(0-a)(2\cdot 0-1)}=\frac{k}{-a(-1)}=\frac{k}{a}\rightarrow k=2a$$

Como nos dicen que tiene de asíntota vertical la recta $x=2$ , el límite cuando $x$ tienda a $2$ nos debe dar infinito para que exista dicha asíntota.

$$\lim_{x\to 2}\frac{k}{(x-a)(2x-1)}=\infty\rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{k}{(2-a)(2\cdot 2-1)}=\infty\rightarrow\frac{k}{3(2-a)}=\infty$$

Si $k=2a$ → $\frac{2a}{3(2-a)}=\infty$ → El denominador debe anularse → $3(2-a)=0\rightarrow a=2$

En consecuencia → $k=4$

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función, hallamos la primera derivada.

$$f(x)=\frac{4}{(x-2)(2x-1)} \quad , \quad Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$$

$$f'(x)=\frac{-4[(2x-1)+2(x-2)]}{(x-2)^2(2x-1)^2}=\frac{-4(2x-1+2x-4)}{(x-2)^2(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-8x+4-8x+16}{(x-2)^2(2x-1)^2}=\frac{20-16x}{(x-2)^2(2x-1)^2}$$

Hallamos los valores críticos que anulan la primera derivada:

$$20-16x=0 \rightarrow x=\frac{5}{4}$$

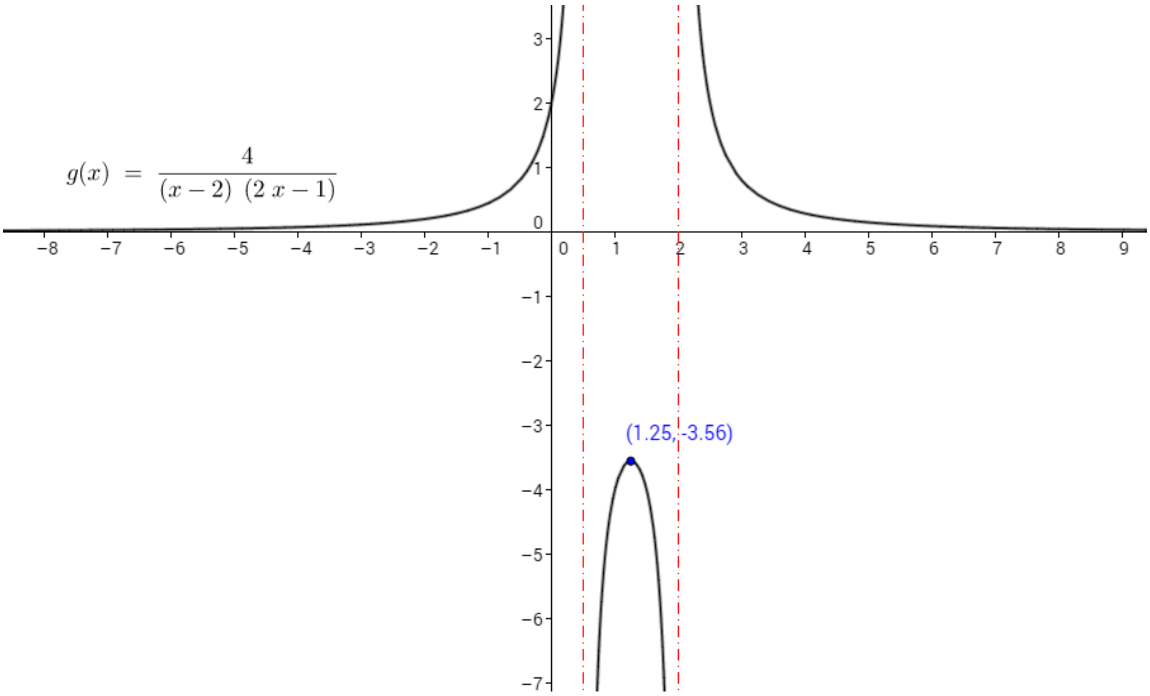
| *Función* $f(x)$ | $f(x)\uparrow$ | $f(x)\uparrow$ | $f(x)\downarrow$ | $f(x)\downarrow$ |
|---|---|---|---|---|
| *Intervalos* | $(-\infty,\frac{1}{2})$ | $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ | $(\frac{5}{4},2)$ | $(2,+\infty)$ |
| *Derivada* $f'(x)$ | $f'(0)>0$ | $f'(1)>0$ | $f'(\frac{7}{4})<0$ | $f'(10)<0$ |

Hallamos el valor de la ordenada en el único extremo relativo que tiene la gráfica: un máximo para $x=\frac{5}{4}$ .

$$f(x)=\frac{4}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f(\frac{5}{4})=\frac{4}{\left(\frac{5}{4}-2\right)\left(2\cdot\frac{5}{4}-1\right)}=\frac{4}{\left(\frac{5-8}{4}\right)\left(\frac{10-4}{4}\right)}=\frac{4}{\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)} \quad \rightarrow \quad f(\frac{5}{4})=\frac{-32}{9}$$

El punto $(\frac{5}{4},\frac{-32}{9})$ es un máximo relativo de la función.


$g(x) = \frac{4}{(x-2)\ (2\,x-1)}$
(1.25, -3.56)

# Hoja 4. Problema 3

# Resuelto por José Carlos Rodríguez Rodríguez (septiembre 2014)

**3.Considera la función** $f(x)=x^3+a x^2+b x+c$ **. Determina** $a, b$ $y$ $c$ **sabiendo que la recta normal a la gráfica en el punto de abscisa** $x=0$ **es** $y+x+3=0$ **y que el punto de inflexión tiene abscisa** $x=1$ **.**

Debido a que los puntos de inflexión se calculan anulando la segunda derivada.

$$f(x)=x^3+a x^2+b x+c \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f''(x)=6x+2a$$

Sabiendo que en el punto $x=1$ hay un punto de inflexión, deducimos que en ese valor la derivada valdrá $0$ .

$$f''(x)=0 \rightarrow 0=6x+2a \rightarrow a=-3$$

Por otro lado, del enunciado podemos deducir que las curvas $f(x)=x^3+a x^2+b x+c$ y la recta $y+x+3=0$ se cortan en el punto $x=0$ . Sustituyo $x=0$ tanto en la función como en la recta, e igualamos:

$$f(x)=3x^2+2ax^2+bx+c \rightarrow f(0)=c$$
$$f(x)=-x-3 \rightarrow f(0)=-3$$

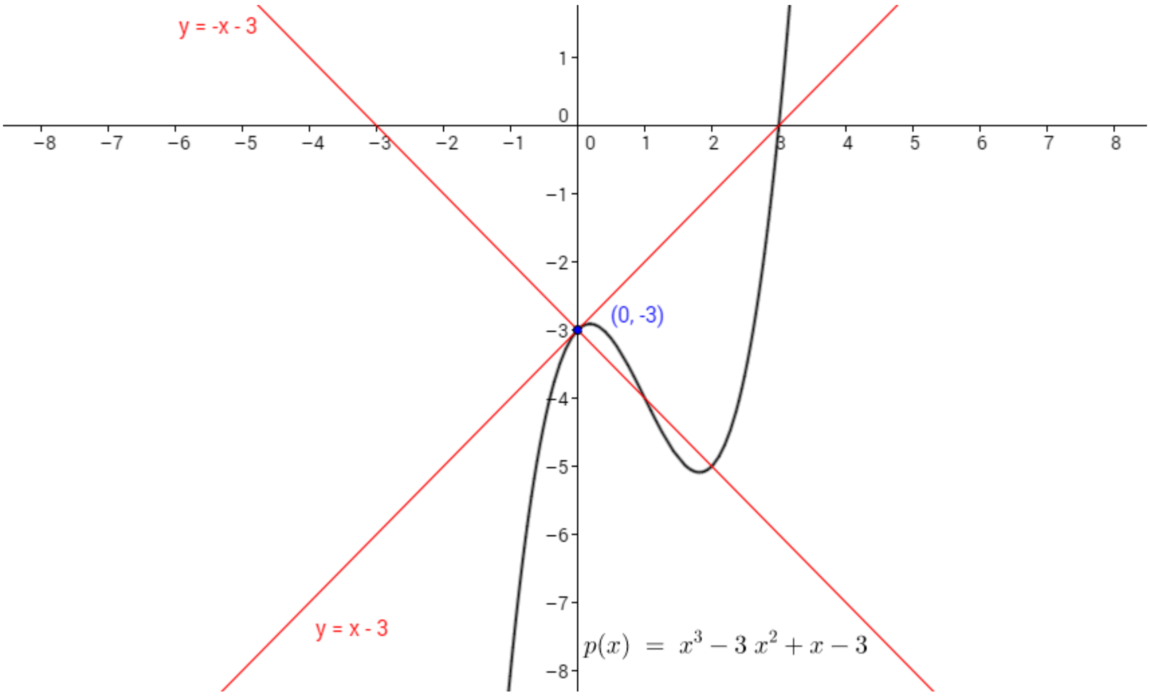
Por lo tanto → $c=-3$

Sabiendo que existe una recta normal $y+x+3=0$ a la gráfica en el punto $x=0$ , obtenemos la pendiente de la recta tangente como perpendicular a la normal (recuerda que el producto de pendientes de rectas perpendiculares es igual a $-1$ ).

$$y+x+3=0 \rightarrow y=-x-3 \rightarrow m_{normal}=-1 \ , \ m_{tangente}=1$$

$$f'(x)=3x^2-6x+b \rightarrow f'(0)=3\cdot 0-6\cdot 0+b = 1 \rightarrow b=1$$

Nuestra función queda → $f(x)=x^3-3x^2+x-3$



# Hoja 4. Problema 4

# Resuelto por Javier Vallecillo (septiembre 2014)

**1. Sabiendo que** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}\right)$ **es finito, calcula** $b$ **y el valor del límite.**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}\right)=\frac{0}{0}$$

Indeterminación → Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-x\cdot sen(x)+b\cos(x)}{3x^2}=\frac{1+b}{0}$$

Para evitar la divergencia a infinito, el numerador también debe ser cero.

De esta forma tendríamos una nueva indeterminación 0/0 y podríamos volver a aplicar L'Hôpital en busca del valor finito del límite.

$$1+b=0 \quad\rightarrow\quad b=-1$$

El límite queda:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cdot sen(x)}{3x^2}\right)=\frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-sen(x)-x\cdot\cos(x)}{6x}\right)=\frac{0}{0}$$

Nuevamente aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{-\cos(x) - \cos(x) + x \cdot sen(x)}{6} \right) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$