# Problemas – Tema 1

# Solución a problemas de Repaso de 1ºBachillerato - Hoja 05 - Problemas 1, 2, 3, 5

## Hoja 5. Problema 1

## Resuelto por Andrés Pineda (septiembre 2014)

**1. Sea** $g(x)=\frac{m x^3}{(x-n)^2}$ **, con** $x\neq n$ **.**

**a) Halla** $m$ **y** $n$ **sabiendo que la recta** $y=2x-4$ **es una asíntota de la gráfica de** $g(x)$ **.**

**b) Determina si la gráfica de** $g(x)$ **es simétrica respecto al origen.**

a) Si la recta $y=2x-4$ es una asíntota oblicua, la convergencia de los dos siguientes límites debe ser:

$$pendiente=2 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=m \quad \rightarrow \quad m=2$$

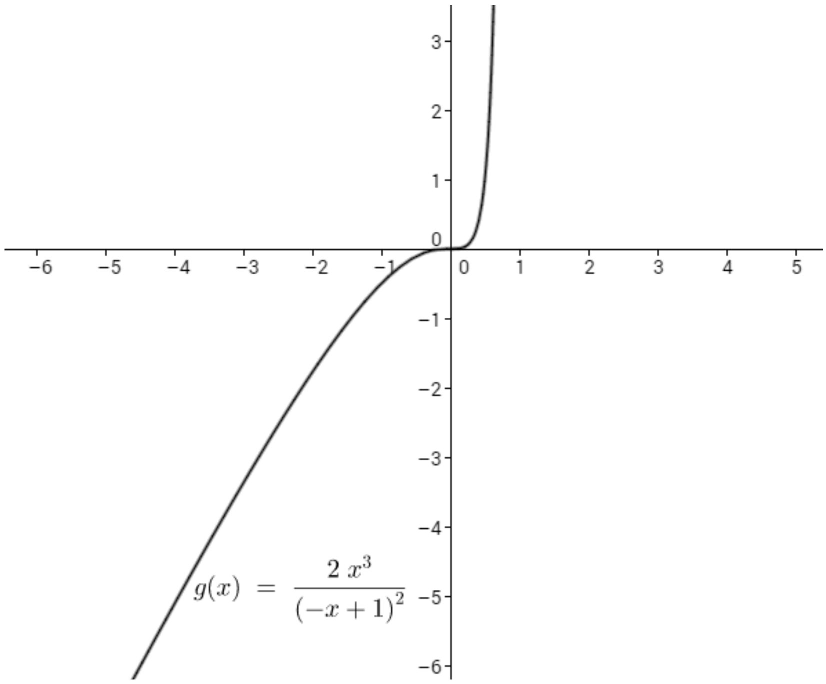
$$ordenada \;\; en \;\; el \;\; origen=-4 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}(g(x)-2x)=n \quad \rightarrow \quad 4n=-4 \quad \rightarrow \quad n=-1$$

La función resulta $g(x)=\frac{2x^3}{(x+1)^2}$

b) Una función $g(x)$ es imar, es decir, simétrica respecto al origen si $g(x)=-g(-x)$ .

$$g(x)=\frac{2x^3}{(x+1)^2} \quad , \quad g(-x)=\frac{-2x^3}{(-x+1)^2} \quad \rightarrow \quad g(x)\neq -g(-x)$$ $\rightarrow$ No es impar

La gráfica de la función confirma que la función no es impar.


$g(x) = \frac{2x^3}{(-x+1)^2}$

# Hoja 5. Problema 2

# Resuelto por Javier Bermúdez (septiembre 2015)

**2. Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ . Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica tiene abscisa $x=1$ y que $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor $-9$ . Calcula $a$, $b$ y $c$ .**

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad\rightarrow\quad f'(x)=3x^2+2ax+b \quad\rightarrow\quad f''(x)=6x+2a$$

Puno de inflexión en $x=1 \rightarrow f''(1)=6+2a$ , $f''(1)=0 \rightarrow 6+2a=0$

Mínimo relativo en $x=2 \rightarrow f'(2)=12+4a+b$ , $f'(2)=0 \rightarrow 12+4a+b=0$

Punto de la función $(2,-9) \rightarrow f(2)=8+4a+2b+c$ , $f(2)=-9 \rightarrow 8+4a+2b+c=-9$

Formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, de soluciones:

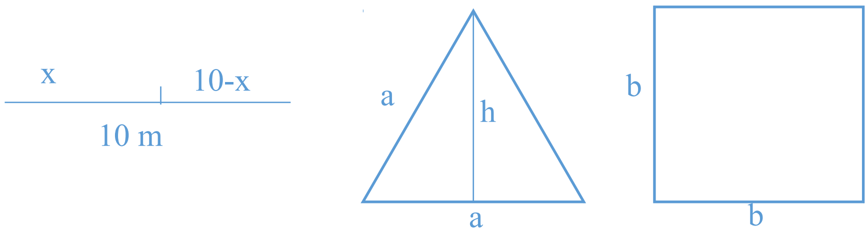
$$a=-3, b=0, c=-5$$

## Hoja 5. Problema 3

## Resuelto por Ana Jerónimo (septiembre 2014)

**3. Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.**

Nos ayudamos del siguiente dibujo.




Si con el trozo de alambre de longitud $x$ construimos el triángulo equilátero (tres lados iguales), deducimos → $a=\frac{x}{3}$

Si con el trozo de alambre de longitud $10-x$ construimos el cuadrado (cuatro lados iguales), deducimos → $b=\frac{(10-x)}{4}$

La función que debemos minimizar es la suma de las áreas de ambas figuras.

$$A=A_{triángulo}+A_{cuadrado}$$

El área del triángulo es $A_{triángulo}=\frac{a\cdot h}{2}$ . La altura $h$ la calculamos con el teorema de Pitágoras.

$$h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h=\frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad A_{triángulo}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Sustituyendo $a=\frac{x}{3}$ $\rightarrow$ $A_{triángulo}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}$

El área del cuadrado es $A_{cuadrado}=b^2$ . Si $b=\frac{(10-x)}{4} \rightarrow A_{cuadrado}=\frac{(10-x)^2}{16}$

La suma de ambas áreas da luar a la función a minimizar.

$$A=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\frac{(10-x)^2}{16}$$

$$A'=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{10-x}{8}=\frac{4x\sqrt{3}-90+9x}{72}=\frac{x(4\sqrt{3}+9)-90}{72} \quad , \quad A'=0 \quad \rightarrow \quad x(4\sqrt{3}+9)-90=0$$

$$x=\frac{90}{4\sqrt{3}+9}$$

Ahora, comprobamos si este resultado es el que minimiza las áreas hallando la segunda derivada y verificando que al evaluar la segunda derivada en nuestro valor, el resultado es mayor que cero.

$A''=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{90}{4\sqrt{3}+9}$ es un mínimo de la función

Los trozos solución a nuestro problema son $x=\frac{90}{4\sqrt{3}+9}$ y $10-x=10-\frac{90}{4\sqrt{3}+9}=\frac{40\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}$ , con unidad de distancia el metro.

## Hoja 5. Problema 5

## Resuelto por Carlos Pareja (octubre 2014)

**5. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.**

Consideramos un triángulo que descansa sobre su base $x$ (lado desigual del triángulo isósceles) y con los otros dos lados iguales de longitud $y$ . La altura del triángulo es $h$ .

El enunciado nos da el perímetro del triángulo (suma de todos los lados).

$$P=8\ u \rightarrow 2y+x=8 \rightarrow y=\frac{8-x}{2}$$

El área del triángulo es la función a maximizar → $A=\frac{x\cdot h}{2}$

Debemos expresar la altura $h$ en función de $x$ , para tener el área expresada según una única variable $x$ .

El triángulo isósceles podemos dividirlo en dos triángulos rectángulos, de hipotenusa $y$ y con catetos de longitud $h$ y $\frac{x}{2}$ . Por Pitágoras:

$$y^2=h^2+\frac{x^2}{2^2} \rightarrow h=\sqrt{y^2+\frac{x^2}{4}}$$

Recordamos que $y=\frac{8-x}{2} \rightarrow h=\sqrt{\frac{64-16x}{4}}=\sqrt{16-4x}$

Y este valor de la altura lo llevamos a la ecuación del área → $A=\frac{x\cdot\sqrt{16-4x}}{2}=\sqrt{4x^2-x^3}$

Para que el área sea máxima tenemos que hacer la derivada, igualar a cero y justificar si existe un máximo relativo.

$$A'(x)=\frac{8x-3x^2}{2\cdot\sqrt{4x^2-x^3}} \quad , \quad A'=0 \quad \rightarrow \quad x=0, \quad x=8/3$$

Tienen sentido distancias positivas, por lo que trabajamos con el punto crítico $x=\frac{8}{3}$ .

Debemos considerar también el dominio de la función:

$$A=\sqrt{4x^2-x^3} \quad \rightarrow \quad Dom(A)=x\in\mathbb{R}/x\leq 4$$

Evaluamos en $(0,\frac{8}{3}) \quad \rightarrow \quad A'(1)>0 \quad \rightarrow \quad A$ creciente

Evaluamos en $(\frac{8}{3},4) \quad \rightarrow \quad A'(3)<0 \quad \rightarrow \quad A$ decreciente

Por lo tanto tenemos un máximo relativo en $x=\frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad y=\frac{8}{3} \quad , \quad h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Esta solución genera un área máxima de $A=\frac{16\sqrt{3}}{9}\ u^2$ .