Problemas – Tema 2

Solución a problemas de Límite y Continuidad - Hoja 03 - Problemas 2, 4, 5

Hoja 3. Problema 2

Resuelto por Andrés Pineda (noviembre 2014)

2. Determina el valor de a para que el siguiente límite sea igual al número e .

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}$$

Debemos buscar la expresión del número e en el límite:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))=1^{\infty} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

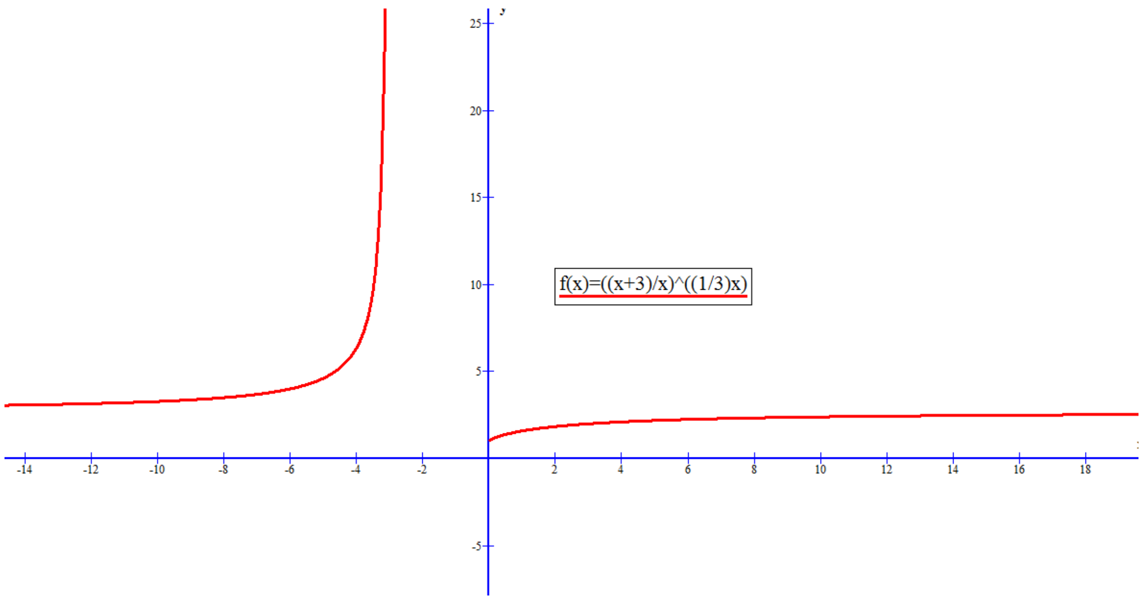
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{ax}$$

Comparando con la definición del número e , si $a=\frac{1}{3}$ tendremos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}=e$$

En la gráfica podemos observar la existencia de la asíntota horizontal $y=e$, cuando x tiende a infinito.

$$Gráfica\ \ de\ \ f(x)=\left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\ \ con\ \ asíntota\ \ horizontal\ \ y=e$$



Hoja 3. Problema 4

Resuelto por Antonio Galdó (noviembre 2014)

4. Calcula $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)=\infty-\infty$ → multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+4-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}\right)$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}\right)$ → dividimos todo por x (máxima potencia que aparece en el cociente)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x/x+4/x}{\sqrt{x^2/x^2-5x/x^2+4/x^2}+x/x}\right) \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5+4/x}{\sqrt{1-5/x+4/x^2}+1}\right)=\frac{-5}{2}$$

Hoja 3. Problema 5

Resuelto por Francisco García Olmedo (octubre 2014)

5. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4}$ **. Calcular asíntotas.**

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Asíntota vertical → $\lim\limits_{x\to\pm 2}\dfrac{x^2-16}{x^2-4}=\infty$ → Debemos estudiar los límites laterales

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^+}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^-}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{-12}{0^+}=-\infty$$

Existen asítotas verticales en $x=-2$, $x=2$.

Asíntota Horizontal → $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-16}{x^2-4}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$

Obtenemos $y=1$ como asíntota horizontal. El límite lo resuelvo aplicando L'Hôpital (derivando numerado y denominador por separado) o bien dividiendo los coeficientes que acompañan a la máxima potencia de x (en nuestro caso x^2).

Al haber existir asíntota horizontal no habrá asíntota oblicua.

En la representación gráfica podemos apreciar la curva y sus asíntotas.

Gráfica de $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4}$ *y asíntotas*