# Teoría – Tema 2

# Definición métrica o formal de límite

## Índice de contenido

# Límite finito en un punto

Sea $f(x): I \to \mathbb{R}$ una función de variable real $x$.

Diremos que $f(x)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in I$ si la función $f(x)$ se puede acercar todo lo que queramos al valor límite $L$ cuando $x$ se acerca suficientemente a $x_0$.

¿Cómo expresar esta definición de manera analítica?

Diremos que $f(x)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in I$ si, y solo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in E^*(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ y se denota:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

En otras palabras, $f(x)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in I$ si, y solo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Y a esta definición la llamaremos **definición métrica o formal** de límite finito en un punto.

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1$.

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0 = 3$ y $L = 1$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 5) - 1| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - 3| < \delta \Rightarrow |2x - 6| < \varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Lo siguiente: partiendo de un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y de la desigualdad $|2x - 6| < \varepsilon$, debemos operar hasta conseguir la desigualdad $|x - 3| < \delta$ para un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño (tan pequeños como yo quiera).

$\varepsilon > 0$ , $|2x - 6| < \varepsilon \rightarrow |2(x - 3)| < \varepsilon \rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$ → Llamamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , de tal forma que si $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se cumplirá que $\delta > 0$ también es arbitrario. Y por lo tanto se cumplirá $|x - 3| < \delta$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$ .

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0=1$ y $L=\frac{1}{2}$ :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow |(\frac{1}{x+1})-\frac{1}{2}|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow |\frac{1-x}{2(x+1)}|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Lo siguiente: partiendo de un $\varepsilon>0$ arbitrario y de la desigualdad $|\frac{1-x}{2(x+1)}|<\varepsilon$ , debemos operar hasta conseguir la desigualdad $|x-1|<\delta$ para un $\delta>0$ arbitrario.

$\varepsilon>0$ , $|\frac{1-x}{2(x+1)}|<\varepsilon \rightarrow |\frac{-(x-1)}{2(x+1)}|<\varepsilon \rightarrow |\frac{x-1}{2(x+1)}|<\varepsilon \rightarrow |x-1|<2\varepsilon|x+1|$ → Llegados a este punto no podemos igualar $\delta=2\varepsilon|x+1|$ porque $\delta$ dependería de la variable $x$ y no sería un valor arbitrario. Pero sí podemos acotar superiormente el valor $\delta$ , ya que necesitamos que arbitrariamente pequeño (“tan pequeño como yo quiera”), por lo que somos libres de acotarlo superiormente.

$\delta<0,5 \rightarrow$ Si $x_0=1 \rightarrow x\in(1-0,5, 1+0,5) \rightarrow x\in(0,5 , 1,5) \rightarrow |x+1|\leq(1,5+1) \rightarrow |x+1|<2,5 \rightarrow 2|x+1|<2\cdot 2,5 \rightarrow 2|x+1|<5 \rightarrow 2\varepsilon|x+1|<5\varepsilon$ → Ahora sí igualamos $\delta=5\varepsilon \rightarrow 2\varepsilon|x+1|<\delta \rightarrow |x-1|<\delta$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).

# Límite infinito en un punto (asíntota vertical)

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite infinito ( $\infty$ ) en el punto $x_0 \in I$ si, y solo si, $\forall k>0, \exists \delta>0 / |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>k$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Con otras palabras, siempre encuentro un valor de la función $f(x)$ mayor que cualquier valor real $k$ positivo si elijo un entorno suficientemente pequeño alrededor de $x_0$ .

$f(x)$ tiene límite menos infinito ( $-\infty$ ) en el punto $x_0 \in I$ si, y solo si, $\forall k<0, \exists \delta>0 / |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<k$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Con otras palabras, siempre encuentro un valor de la función $f(x)$ menor que cualquier valor real $k$ negativo si elijo un entorno suficientemente pequeño alrededor de $x_0$ .

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0 = 0$ y $+\infty$ :

$$\forall k>0, \exists \delta>0 / |x-0|<\delta \Rightarrow \frac{1}{x^2}>k \quad \to \quad \forall k>0, \exists \delta>0 / |x|<\delta \Rightarrow \frac{1}{x^2}>k$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $\frac{1}{x^2}>k$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $|x|<\delta$ .

$k>0$ , $\frac{1}{x^2}>k \to \frac{1}{k}>x^2$ $(puedo\ hacer\ este\ paso\ porque\ k\ y\ x^2\ son\ positivos) \to$ $|\frac{1}{k}|>|x^2| \to \frac{1}{k}>|x|^2 \to \sqrt{\frac{1}{k}}>|x| \to$ Si $\delta = \sqrt{\frac{1}{k}} \to |x|<\delta \to$ Como queríamos demostrar (c.q.d.).

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ .

Partimos de la definición métrica, considerando $x_0=1$ y $-\infty$ :

$$\forall k<0, \exists \delta>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow \frac{-1}{x-1}<k$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k<0$ arbitrariamente negativo y de la desigualdad $\frac{-1}{x-1}<k$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $|x-1|<\delta$ .

$k<0$ , $\frac{-1}{x-1}<k$ $\rightarrow$ $|\frac{-1}{x-1}|>|k|$ $(cambia\ \ desigualdad\ \ porque\ \ k<0\rightarrow|k|>0)$ $\rightarrow$ $\frac{1}{|x-1|}>|k|$ $\rightarrow$ $1>|k|\cdot|x-1|$ $\rightarrow$ $\frac{1}{|k|}>|x-1|$ $\rightarrow$ Si $\delta=\frac{1}{|k|}$ $\rightarrow$ $|x-1|<\delta$ $\rightarrow$ Como queríamos demostrar (c.q.d.).

## Límite finito en el infinito (asíntota horizontal)

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite finito $L \in \mathbb{R}$ en el infinito si, y solo si, $\forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Con otras palabras, la función $f(x)$ se acerca tanto como queramos al límite $L$ con tal de tomar un valor real $k$ suficientemente grande.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite finito $L \in \mathbb{R}$ en menos infinito si, y solo si, $\forall k<0, \exists \varepsilon>0 / x<k \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Con otras palabras, la función $f(x)$ se acerca tanto como queramos al límite $L$ con tal de tomar un valor real $k$ suficientemente negativo.

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ .

Partimos de la definición métrica, considerando $+\infty$ y $L=1$ :

$$\forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$ .

$k>0$ , $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\varepsilon}<|x|$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\varepsilon}<x \, (si \;\; x \to \infty, |x|=x)$ $\rightarrow$ Si $\frac{1}{\varepsilon}=k$ $\rightarrow$ $x>k$ $\rightarrow$ Como queríamos demostrar (c.q.d.).

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x}=-1$ .

Partimos de la definición métrica, considerando $-\infty$ y $L=-1$ :

$$\forall k<0,\exists\varepsilon>0/x<k\Rightarrow|\frac{1-x}{x}-(-1)|<\varepsilon \quad\rightarrow\quad \forall k<0,\exists\varepsilon>0/x<k\Rightarrow|\frac{1}{x}|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k<0$ arbitrariamente negativo y de la desigualdad $|\frac{1}{x}|<\varepsilon$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $x<k$ .

$$k<0 \ ,\ |\frac{1}{x}|<\varepsilon \ \rightarrow\ \frac{1}{\varepsilon}<|x| \ \rightarrow\ \frac{1}{\varepsilon}<-x\,(si\ \ x\to-\infty,|x|=-x) \ \rightarrow$$

$\rightarrow\ \frac{-1}{\varepsilon}>x\,(\ cambia\ \ sentido\ \ desigualdad) \ \rightarrow$ Si $k=\frac{-1}{\varepsilon}$ $\rightarrow$ $x<k$ $\rightarrow$ Como queríamos demostrar (c.q.d.).

## Límite infinito en el infinito

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite infinito ( $\infty$ ) en el infinito si, y solo si, $\forall k>0, \exists m>0 / x>k \Rightarrow f(x)>m$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es mayor que cualquier valor real $m$ positivo con tal de elegir un valor real $x$ suficientemente grande.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite menos infinito ( $-\infty$ ) en el infinito si, y solo si, $\forall k>0, \exists m<0 / x>k \Rightarrow f(x)<m$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty$$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es menor que cualquier valor real $m$ negativo con tal de elegir un valor real $x$ suficientemente grande.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite infinito ( $\infty$ ) en menos infinito si, y solo si, $\forall k<0, \exists m>0 / x<k \Rightarrow f(x)>m$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\infty$$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es mayor que cualquier valor real $m$ positivo con tal de elegir un valor real $x$ suficientemente negativo.

$f(x): I \to \mathbb{R}$ tiene límite menos infinito ( $-\infty$ ) en menos infinito si, y solo si, $\forall k<0, \exists m<0 / x<k \Rightarrow f(x)<m$ . Y se denota:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$$

Con otras palabras, la función $f(x)$ siempre es menor que cualquier valor real $m$ negativo con tal de elegir un valor real $x$ suficientemente negativo.

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \to \infty}(x+2)=\infty$ .

Partimos de la definición métrica:

$$\forall k>0, \exists m>0 / x>k \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $(x+2)>m$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$ .

$k>0$ , $(x+2)>m$ → $x>m-2$ → Acotamos inferiormente $m>2$ , ya que solo necesitamos que sea arbitrariamente positivo → Si $k=m-2>0$ → $x>k$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, $\lim_{x \to -\infty}(x+3)=-\infty$ .

Partimos de la definición métrica:

$$\forall k<0, \exists m<0 / x<k \Rightarrow (x+3)<m$$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k<0$ arbitrariamente negativo y de la desigualdad $(x+3)<m$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $x<k$ .

$k<0$ , $(x+3)<m$ → $x<m-3$ → Acotamos superiormente $m<3$ , ya que solo necesitamos que sea arbitrariamente negativo → Si $k=m-3<0$ → $x<k$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).

## Asíntotas oblicuas

La definición formal de asíntota oblicua la vamos a reducir a la definición de límite finito en el infinito. Hablamos de asíntota oblicua cuando existe la función, en el infinito, tiende a una recta de pendiente $m\in\mathbb{R}$ y de ordenada en el origen $n\in\mathbb{R}$ . Es decir:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(mx+n)$ $\rightarrow$ Dividimos por $x$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(m+\frac{n}{x})$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(m)+\lim_{x\to\infty}(\frac{n}{x})$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m+0$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$

Llegando a un límite finito en el infinito de la nueva función $\frac{f(x)}{x}$ . Además:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(mx+n)$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(n)$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n$

Llegando a un límite finito en el infinito de la nueva función $(f(x)-mx)$ .

**Ejemplo**

Demostrar, mediante la definición métrica de límite, que la función $\frac{x^2+1}{x}$ posee asíntota oblicua $y=x$ .

Debemos estudiar el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ con $m=1$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$ . Así:

$\forall k>0,\exists\varepsilon>0/x>k\Rightarrow|\frac{x^2+1}{x^2}-1|<\varepsilon$ $\rightarrow$ $\forall k>0,\exists\varepsilon>0/x>k\Rightarrow|\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $|\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$ .

$k>0$ , $|\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\varepsilon}<|x^2|$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\varepsilon}<x^2(debido\ a\ que\ |x^2|=x^2>0)$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}<x(si\,x\to\infty,x>0\ y\ la\ desigualdad\ se\ cumple)$ $\rightarrow$ Si $k=+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ $\rightarrow$ $x>k$ $\rightarrow$
Como queríamos demostrar (c.q.d.).

Ya tenemos el valor de la pendiente de la asíntota oblicua: $m=1$ . Necesitamos el valor de la ordenada en el origen.

Debemos estudiar el límite $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n$ con $m=1$ y $n=0$ →

$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x}-x)=0 \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ . Así:

$\forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |\frac{1}{x}-0|<\varepsilon \rightarrow \forall k>0, \exists \varepsilon>0 / x>k \Rightarrow |\frac{1}{x^2}|<\varepsilon$

¿Qué debemos demostrar?

Partiendo de un $k>0$ arbitrariamente grande y de la desigualdad $|\frac{1}{x}|<\varepsilon$ , debemos operar hasta obtener la desigualdad $x>k$ .

$k>0$ , $|\frac{1}{x}|<\varepsilon \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}<|x| \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}<x\,(si\ x\to\infty, x>0\ \ y\ \ la\ \ desigualdad\ \ se\ \ cumple) \rightarrow$

→ Si $k=\frac{1}{\varepsilon}$ → $x>k$ → Como queríamos demostrar (c.q.d.).