Problemas – Tema 3

Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 02 - Problemas 1, 3, 6, 8

Hoja 2. Problema 1

Resuelto por Inma Esteban García (noviembre 2014)

1. Obtener la derivada de $f(x)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ **.**

Recuerdo las siguientes derivadas:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}; y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$y=[f(x)]^n; y'=n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

$$f'(x)=\frac{3\cdot(x+1)^2-(3x+2)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)\cdot[3\cdot(x+1)-(3x+2)\cdot 2]}{(x+1)^4}=\frac{3x+3-6x-4}{(x+1)^3}=\frac{-3x-1}{(x+1)^3}$$

Hoja 2. Problema 3

Resuelto por Ignacio Roldán Ortiz (noviembre 2014)

3. Usa la definición formal de derivada para obtener la derivada de $f(x)=\frac{1}{x}$ **.**

La definición formal de derivada es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Aplicado a nuestra función:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x\cdot(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x\cdot(x+h)}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{x\cdot(x+h)}:\frac{h}{1}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{x\cdot h\cdot(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}$$

Efectuamos el límite → $\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}=\frac{-1}{x\cdot(x+0)}=\frac{-1}{x^2}$

Por lo tanto → $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

Hoja 2. Problema 6

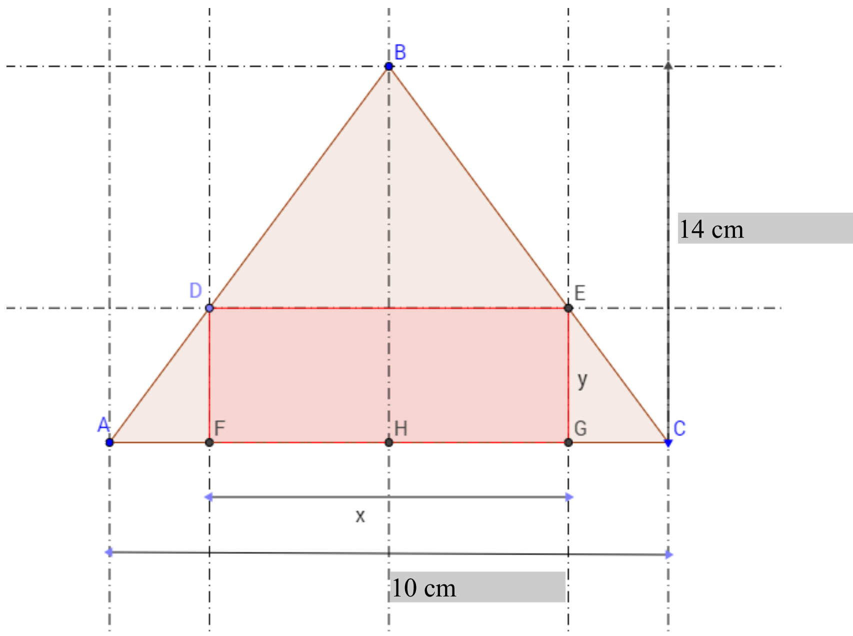
Resuelto por Gloria Corpas (diciembre 2014)

6. Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.

Las incógnitas del problema son:

$$base \quad del \quad rectángulo = x$$
$$altura \quad del \quad rectángulo = y$$

Realicemos un dibujo que ilustre el problema.



La función a maximizar es el área del rectángulo inscrito en el triángulo (sombreado de color rojo).

$$Área = x \cdot y$$

Para poder derivar y optimizar debemos expresar la función dependiendo de solo una variable. La relación entre ambas variables podemos obtenerla del enunciado, con ayuda del dibujo auxiliar.

El triángulo rectángulo ABH es proporcional al triángulo de vértices ADF. Por lo tanto el ángulo del vértice A es idéntico en ambos triángulos. Y sus tangentes también (el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo al vértice A). Es decir:

$$Triángulo\, ABH \rightarrow \tan \hat{A} = \frac{14}{5}$$

$$Triángulo\, ADF \rightarrow tg(\hat{A}) = \frac{y}{5-\frac{x}{2}}$$

Igualamos.

$$\frac{14}{5} = \frac{y}{5-\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad x = 10 - \frac{5}{7} y$$

Sustituyendo el valor de x en la función $Área$ dejamos todo expresado en función de la variable y .

$$A = \left(10 - \frac{5}{7} y\right) y = 10\, y - \frac{5}{7} y^2$$

Derivamos e igualamos a cero.

$$A' = 10 - \frac{10}{7} y \quad , \quad A' = 0 \quad \rightarrow \quad y = 7$$

Para demostrar si es un máximo, calculamos la derivada segunda.

$$A'' = \frac{-10}{7} < 0 \quad \rightarrow \quad y = 7$$ es un máximo de la función

Los valores que maximizan el área son: $x = base = 5 \quad m$, $y = altura = 7 \quad m$.

Hoja 2. Problema 8

Resuelto por Belén Valenzuela (noviembre 2015)

8. Halla la derivada de $f(x)=5x^2+2x-6$ en $x=-2$ mediante la definición de derivada.

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(-2+h)^2+2(-2+h)-6-(5(-2)^2+2(-2)-6)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5(4+h^2-4h)-4+2h-6-(5\cdot 4-4-6)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{20+5h^2-20h-4+2h-6-20+4+6}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5h^2-18h}{h}=\lim_{h\to 0}(5h-18)=-18$$