

## Problemas – Tema 3

### Solución a problemas de Derivabilidad - Hoja 04 - Problemas 7

#### Hoja 4. Problema 7

#### Resuelto por Jaime Díaz (diciembre 2014)

7. Obtener  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea derivable para cualquier valor de  $x$ .

$$f(x) = \begin{cases} a+bx-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que  $f(x)$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ , tiene que ser continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Las condiciones de continuidad en el punto  $x = x_0$  son:

$$\exists f(x_0), x_0 \in Df$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$$

$$f(x_0) = L$$

Las condiciones para que sea derivable en el punto  $x = x_0$  son:

$$f(x) \text{ sea continua en } x_0$$

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

Primero estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera.

$$x < 1 \Rightarrow f(x) = a + bx - x^2 \rightarrow \text{continua por ser polinómica}$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \text{continua salvo donde se anula el denominador, pero } x = 0 \notin (1, \infty)$$

En el punto frontera  $x=1$  :

$$f(1)=a+b-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} a+bx-x^2=a+b-1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x}=1 \rightarrow a+b-1=1 \rightarrow a+b=2$$

Estudiamos la derivabilidad.

$$f'(x)=\begin{cases} b-2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \text{Recuerda: dejamos los intervalos abiertos}$$

$$x < 1 \rightarrow f'(x)=b-2x \rightarrow \text{continua por ser polinómica} \rightarrow f(x) \text{ es derivable}$$

$$x > 1 \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2} \rightarrow \text{continua salvo donde se anula el denominador, pero } x=0 \notin (1, \infty) \\ \rightarrow f(x) \text{ es derivable}$$

En el punto frontera  $x=1$  :

$$f'(1^-)=\lim_{x \rightarrow 1^-} b-2x=b-2, \quad f'(1^+)=\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x^2}=-1 \rightarrow b-2=-1 \Leftrightarrow b=1$$

Uniendo esta nueva condición a la relación obtenida  $a+b=2$  :

$$b=1, \quad a+b=2 \Leftrightarrow a=1 \rightarrow \text{Valores para que } f(x) \text{ sea continua y derivable en } \mathbb{R} .$$