Actividad con Geogebra

Relacionar una función con su primera y su segunda derivada

Descripción de la actividad

Vamos a estudiar la relación entre las gráficas de un función y las gráficas de su dos primeras derivadas.

Recordamos que la derivada es una medida del crecimiento o decrecimiento de una función. Si la derivada es positiva en un punto, significa que la función es creciente. Si la derivada es negativa, significa que la función es decreciente. Y si la derivada es nula, significa que puede hacer un extremo relativo: $f'(x)=0$

Además, los puntos de inflexión son los extremos de la primera derivada. Es decir, si derivamos la primera derivada e igualamos a cero, obtenemos la condición necesaria de punto de inflexión: $f''(x)=0$.

Además, la interpretación geométrica de la derivada nos dice que la derivada de una función en un punto x_0 coincide con la pendiente de la recta tangente en ese punto: $m=f'(x_0)$.

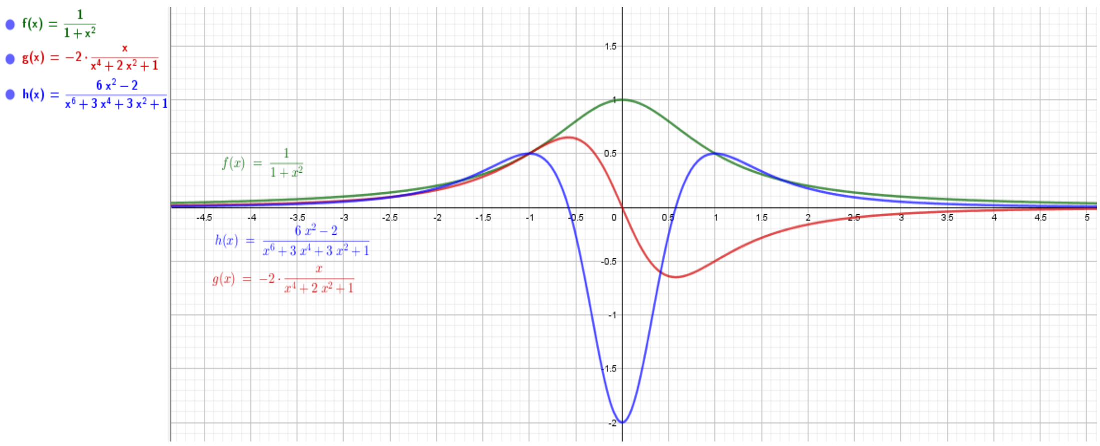
Con estas tres ideas claves, vamos a relacionar la gráfica de $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ con la gráfica de sus funciones derivadas y con la gráfica de algunas de sus rectas tangentes.

Paso 1

En la Vista Gráfica dibujamos $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ y sus dos primeras derivadas. A la primera derivada la llamamos $g(x)=f'(x)$ y a la segunda derivada $h(f'(x))$. En la linea de entrada escribimos:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad g(x)=Derivada(f) \qquad h(x)=Derivada(g)$$

Imagen 1. Detalle de las tres funciones representadas en Vista Gráfica



Paso 2

Activamos la vista CAS de Geogebra. El comando Soluciones permite resolver una ecuación. Para obtener los puntos críticos escribimos en CAS lo siguiente:

$$puntoCritico := Soluciones(g(x)=0)$$

En la variable puntoCritico estamos resolviendo la ecuación que resulta de igualar $g(x)$ a cero. Es decir, de igualar la primera derivada a cero. Con esto obtenemos los puntos críticos.

El comando Soluciones devuelve una lista con tanto elementos como soluciones tenga la ecuación. En nuestro caso, solo tenemos una solución: 0.

Para poder trabajar con el valor de la solución, debemos seleccionar el primer elemento de la lista. Así, podremos representar la coordenada horziontal y vertical del punto crítico con el siguiente comando:

$$A := (puntoCritico(1), f(puntoCritico(1)))$$

De esta forma tendremos el punto $A(0,1)$, que podremo pintar en Vista Gráfica pulsando sobre el icono circular de la línea de CAS.

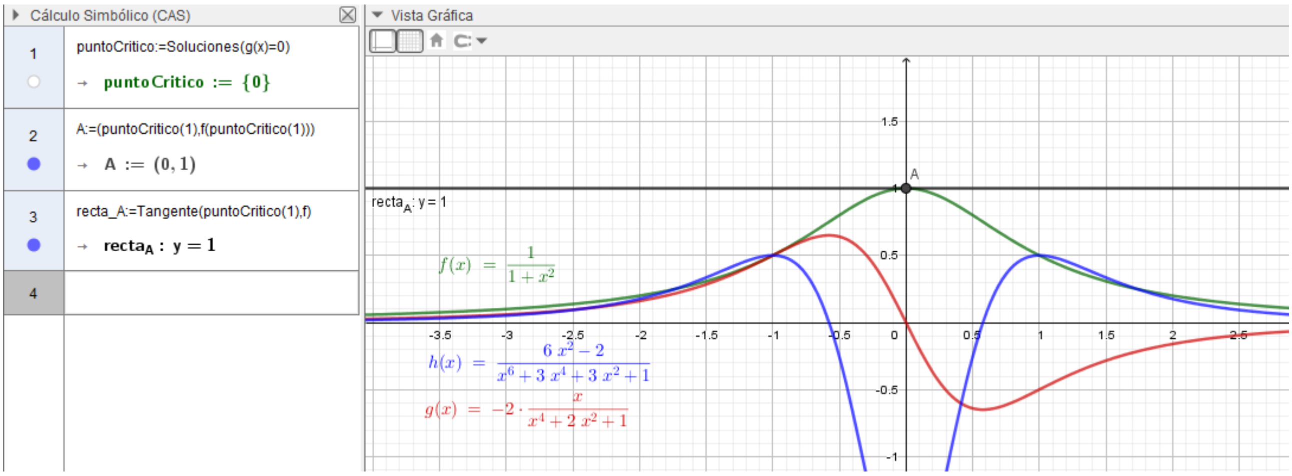
Vamos a trazar la recta tangente a $f(x)$ que pase por el punto crítico. Como es un máximo relativo, tendremos una recta horizontal (pendiente cero). Para obtener la recta tangente usamos el comando de Geogebra llamado Tangente:

$$recta_A := Tangente(puntoCritico, f)$$

Recuerda que el subíndice se escribe con la tecla de guión bajo.

Mostramos también la recta tangente en la Vista Gráfica

Imagen 2. Comandos en CAS para obtener punto crítico y recta tangente a la función



Paso 3

Sabemos que los puntos de inflexión cumplen la condición $f''(x)=0$ .Es decir, los puntos de inflexión son los extremos relativos de la función primera derivada. Vamos a comprobarlo con Geogebra.

Vamos a repetir los pasos del Paso anterior, pero ahora trabajando con $g(x)$ (que es la primera derivada de $f(x)$).

$$puntoCriticoG := Soluciones(h(x)=0)$$

Ahora tendremos almacenada en la variable puntoCriticoG una lista de dos elementos, que son los dos valores que anulan a la segunda derivada.

Podemos obtener las coordenadas horizontales y verticales de los puntos críticos con las siguientes instrucciones:

$$B := (puntoCriticoG(1), f(puntoCriticoG(1)))$$

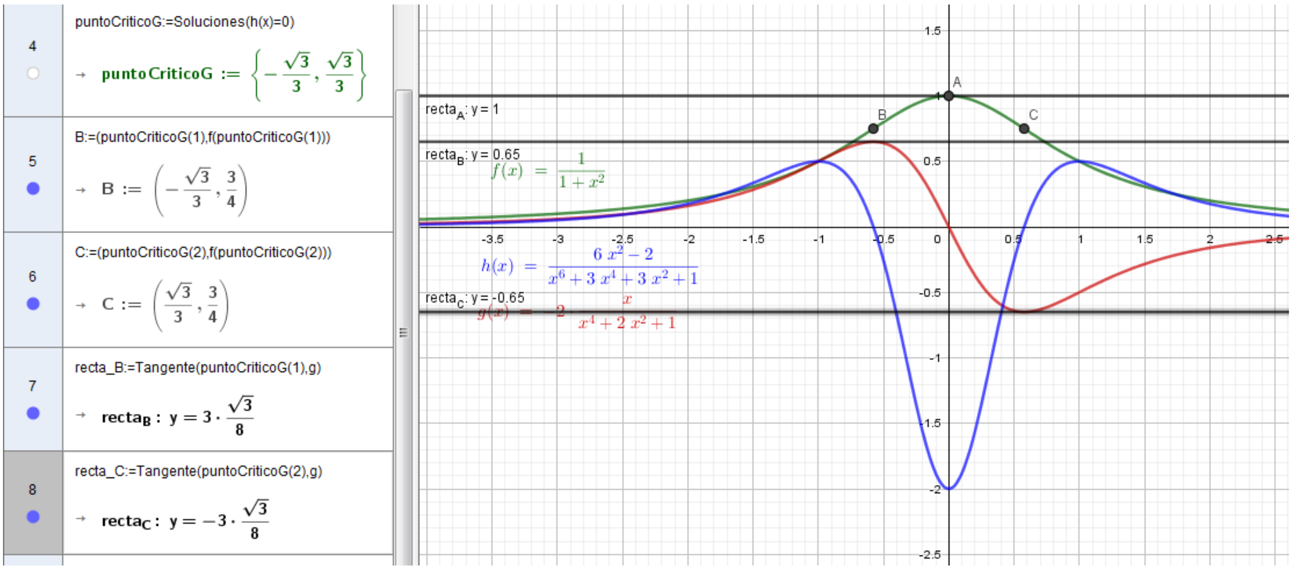
$$C := (puntoCriticoG(2), f(puntoCriticoG(2)))$$

Vamos a comprobar que los puntos de inflexión son los extremos relativos de la primera derivada. Para ello dibujamos las rectas tangentes a la función $g(x)$ que pasan por los puntos B y C .

$$recta_B := Tangente(puntoCriticoG(1), g)$$

$$recta_C := Tangente(puntoCriticoG(2), g)$$

Imagen 3. Comandos en CAS para obtener los puntos de inflexión de la función y las rectas tangentes a la función derivada



Paso 4

Finalmente vamos a crear unos botones sobre la Vista Gráfica para poder mostrar toda la información obtenida paso a paso.

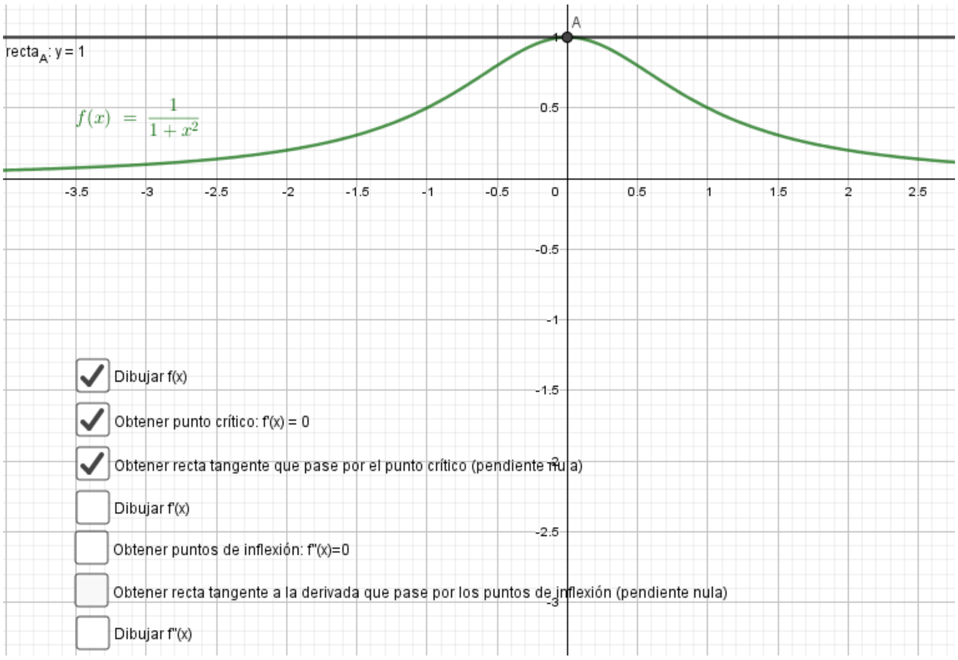
Primero creamos una casilla de control que permita mostrar la función de partida. Pulsamos en  y en el rótulo escribimos “Dibujar f(x)”. Del menú desplegable elegimos la función.

Repetimos el mismo procedimiento para crear otras seis casillas de control:

- Obtener punto crítico: f'(x)=0
- Obtener recta tangente que pase por el punto crítico (pendiente nula)
- Dibujar f '(x)
- Obtener puntos de inflexión: f ''(x)=0

- Obtener recta tangente a la deriva que pasa por los puntos de inflexión (pendiente nula)
- Dibujar f ''(x)

Imagen 4. Casillas de control



Para terminar, **debes escribir en tu cuaderno el siguiente párrafo (resumen de la teoría de la actividad**:

"La función derivada está relacionada con la monotonía de la función original.

Una derivada positiva, implica función creciente. Una derivada negativa, función decreciente. Una derivada igual a cero es la condición necesaria de extremo relativo: $f'(x)=0$.

La segunda derivada es la derivada de la primera derivada. Por lo tanto, los puntos de inflexión son los extremos relativos de la función derivada. Es decir: $f''(x)=\frac{d(f'(x))}{dx}=0$.

La recta tangente a una función en un extremo relativo es una recta horizontal, porque su pendiente es nula. La pendiente es el valor de la derivada de la función en el punto".

Enlace a la actividad resuelta con Geogebra: https://www.geogebra.org/m/cc299vnr