

## Problemas – Tema 4

### Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 01 - Problemas 8, 9

#### Hoja 1. Problema 9

Resuelto por José Antonio Álvarez Ocete (diciembre 2014)

#### 8. Estudia y representa:

El dominio de  $f(x)$  son todos los números reales excepto el 0, pues se anula el denominador de ambas fracciones. En cuanto a los puntos de corte:

OY  $\rightarrow x=0$ , que no está contenido en el dominio de  $f(x)$ , ergo  $f(x)$  no corta al eje OY

OX  $\rightarrow y=0 \rightarrow 0 = \frac{1+x}{x^3} \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow P(-1,0)$

Sobre la simetría de  $f(x)$  podemos decir que no es ni par ni impar puesto que:

$$f(x) \neq f(-x) \quad \text{y} \quad -f(x) \neq f(-x)$$

Asíntota Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x}{x^3} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0^+} \rightarrow +\infty$$

Por lo tanto, hay una Asíntota Vertical en  $x=0$

## Asíntota Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x^3}$$

En el infinito, el polinomio de grado 3 tiene más fuerza que el polinomio de grado 1, por lo tanto hay una Asíntota Horizontal en  $y=0$ .

## Crecimiento:

Derivamos  $f(x)$  para poder estudiar su crecimiento:

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{x^6} + \frac{-2x}{x^4}$$

Ahora la igualamos a 0 para buscar los puntos críticos (posibles máximos o mínimos):

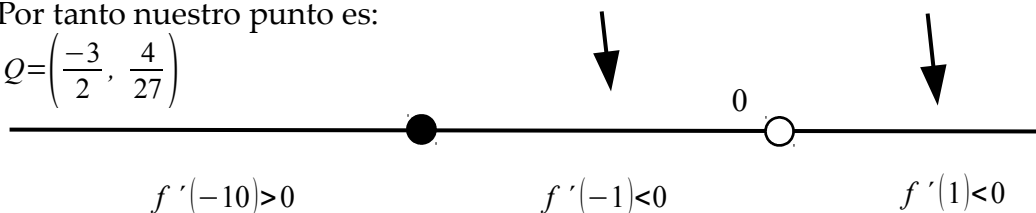
$$\frac{-3x^2}{x^6} + \frac{-2x}{x^4} = 0 \rightarrow \frac{-3x^2 - 2x^3}{x^6} = 0 \rightarrow -3 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

Buscamos la imagen del punto evaluando en  $f(x)$ :

$$f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{-3}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \frac{4}{27}$$

Por tanto nuestro punto es:

$$Q = \left(\frac{-3}{2}, \frac{4}{27}\right)$$



Pero, ¿es máximo o mínimo? Colocamos los puntos críticos en la recta real y evaluamos para ver su crecimiento:  $Q$  es un máximo

## Curvatura:

Para estudiarla hallamos la segunda derivada de  $f(x)$ :

$$f''(x) = \frac{-6x \cdot x^6 + 6x^5 \cdot 3x^2}{x^{12}} + \frac{-2x^4 + 4x^3 \cdot 2x}{x^8}$$

Operamos y simplificamos y nos queda:

$$f''(x) = \frac{6 \cdot (2+x)}{x^5}$$

Para encontrar los posibles puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a 0 y operamos:

$$\frac{6 \cdot (2+x)}{x^5} = 0 \rightarrow 2+x=0 \rightarrow x = -2$$

Para hallar la imagen del punto  $x = -2$  lo evaluamos en nuestra  $f(x)$  inicial:

$$f(-2) = \frac{1}{(-2)^3} + \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{8}$$

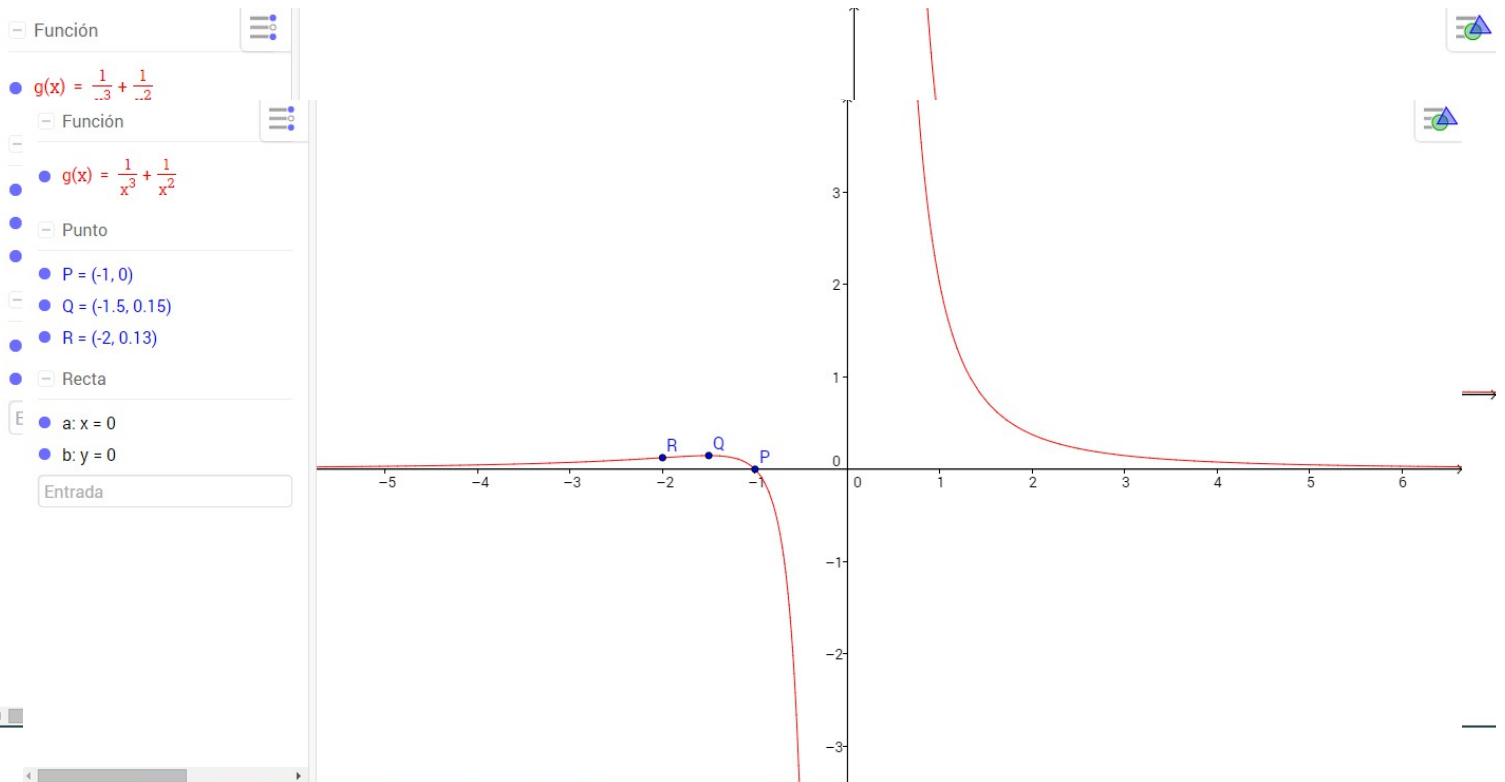
Con lo que el punto R queda como:

$$R = \left(-2, \frac{1}{8}\right)$$

Pero, ¿es un punto de inflexión? Colocamos los puntos críticos en la recta real y evaluamos para ver su curvatura, y vemos que R sí que es un punto de inflexión.

## Representación:

En último lugar, me sirvo de Geogebra para representar la gráfica:



## Hoja 1. Problema 9

### Resuelto por Gabriel Manzano (diciembre 2014)

#### 9. Estudia y representa:

$$f(x) = \left( \frac{3x-2}{7-9x} \right)^2$$

$$f(x) = \left( \frac{3x-2}{7-9x} \right)^2 = \frac{(3x-2)^2}{(7-9x)^2} = \frac{9x^2 - 12x + 4}{49 - 126x + 81x^2}$$

#### DOMINIO:

La función es continua en toda la recta real excepto donde el denominador se anule, es decir:

$$81x^2 - 126x + 49 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{126 \pm \sqrt{15876 - 15876}}{162} = \frac{7}{9}$$

#### PUNTOS DE CORTE:

- Punto de corte con el eje de abscisa. Implica que  $y=0$

$$\frac{(3x-2)^2}{(7-9x)^2} = 0 \rightarrow (3x-2)^2 = 0 \rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0$$

Volvemos aplicar la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{2}{3}$$

$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$  es punto de corte con EL eje OX

- Punto de corte con el eje de ordenada. Implica que  $x=0$

$$y = \frac{9 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 4}{49 - 126 \cdot 0 + 81 \cdot 0^2} = \frac{4}{49}$$

$\left(0, \frac{4}{49}\right)$  es un punto de corte con el eje OY

#### ASÍNTOTAS:

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7}{9}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{7}{9}} \frac{9x^2 - 12x + 4}{81x^2 - 126x + 49} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7}{9}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 - 12x + 4}{81x^2 - 126x + 49} = \infty$$

Existe una **asíntota vertical en**  $\frac{7}{9}$

- Asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 - 12x + 4}{81x^2 - 126x + 49} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{9}$$

Al ser una indeterminación infinito entre infinito, realizamos el cociente entre de los términos de mayor grado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 12x + 4}{81x^2 - 126x + 49} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{9}$$

Al ser una indeterminación infinito entre infinito, realizamos el cociente entre de los términos de mayor grado.

Como coinciden los límites, concluimos que existe una **asíntota horizontal en**  $y = \frac{1}{9}$

- Asíntota inclinada

Cuando existe al menos una asíntota horizontal, **no existe asíntota oblicua**  
**CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO Y PUNTOS DE INFLEXIÓN**

En primer lugar calculamos la derivada de  $f(x) = \left(\frac{3x-2}{7-9x}\right)^2$ :

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{3x-2}{7-9x}\right) \cdot \left(\frac{(3 \cdot (7-9x)) - [(3x-2) \cdot (-9)]}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{3x-2}{7-9x}\right) \cdot \left(\frac{21-27x+27x-18}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{3x-2}{7-9x}\right) \cdot \left(\frac{3}{(7-9x)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (3x-2)}{(7-9x)^3}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{6 \cdot (3x-2)}{(7-9x)^3} = 0 \rightarrow 6 \cdot (3x-2) = 0$$

Despejamos x:

$$6 \cdot (3x - 2) = 0 \rightarrow 18x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Ahora evaluamos en la función derivada a la izquierda y a la derecha de  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{7}{9}$

$$\begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & \\ & & \frac{2}{3} & & \frac{7}{9} & & \\ & | & & | & & & \end{array}$$

Por tanto:

- La función es **decreciente** desde  $(-\infty, \frac{2}{3})$
- **Creciente** desde  $(\frac{2}{3}, \frac{7}{9})$
- **Decreciente** desde  $(\frac{7}{9}, +\infty)$

Para calcular máximos y mínimos sustituimos el valor  $\frac{2}{3}$  en la función original:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left( \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 2}{7 - 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} \right)^2 = 0$$

Conclusión:

- Hay un **mínimo** en  $(\frac{2}{3}, 0)$

### CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Realizamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{18 \cdot (7-9x)^3 - (18x-12) \cdot 3 \cdot (7-9x)^2 \cdot (-9)}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x) = \frac{(7-9x)^2 \cdot [18 \cdot (7-9x) - (18x-12) \cdot 3 \cdot (-9)]}{(7-9x)^6}$$

$$f''(x) = \frac{126 - 162x - (18x-12) \cdot (-27)}{(7-9x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{126 - 162x + 486x - 324}{(7-9x)^4} = \frac{324x - 198}{(7-9x)^4} = \frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4}$$

Igualamos la segunda derivada a cero:

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{18(18x-11)}{(7-9x)^4} = 0 \rightarrow 18(18x-11) = 0 \rightarrow x = \frac{11}{18}$$

Evaluamos en la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de  $\frac{11}{18}$

(candidato a punto de inflexión):

$$\frac{- \rightarrow \quad 11/18 \quad + \text{Convexo}}{\text{Cóncavo} \quad |}$$

Evaluamos el valor  $x_0$  del punto de inflexión en la función original:

$$f\left(\frac{11}{18}\right) = \left(\frac{3 \cdot \left(\frac{11}{18}\right) - 2}{7 - 9 \cdot \left(\frac{11}{18}\right)}\right)^2 = \left(\frac{\frac{-3}{18}}{\frac{27}{18}}\right)^2 = \left(\frac{-3}{18} \cdot \frac{27}{18}\right)^2 = \left(\frac{-54}{486}\right)^2 = \left(\frac{3}{27}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

**Por tanto, un punto de inflexión en  $P\left(\frac{11}{18}, \frac{1}{81}\right)$**

Representación gráfica:

