# Problemas – Tema 4

# Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 02 - Problemas 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10

## Hoja 2. Problema 2

## Resuelto por Carmen Jiménez Cejudo (diciembre 2014)

**2. Estudia y representa** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-5}$

- Dom f(x) = $R^+$- {5}
- Intersecciones con los ejes

  OX: y=0 → f(x)=0 → (0, 0)
  OY: x=0 → f(0)=0 → (0, 0)
- Simetrías

  f(x) ≠ f (-x)
  f(x) ≠ - f (-x)
- Asíntotas

A.V. → $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}}{x-5}$ = $\frac{\sqrt{5}}{0}$ = ¿?

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$$

A.H. $\to \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x-5}=0$ → y = 0

Cómo hay asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.

- Máximos y mínimos.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}(x-5)-\sqrt{x}}{(x-5)^2}=\frac{\frac{(x-5)}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x-5)^2}=\frac{(x-5)-\sqrt{x}\,2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-5)^2}=\frac{x-5-2x}{2\sqrt{x}(x-5)^2}=\frac{-x-5}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$$

Igualo f'(x) a cero para sacar los puntos críticos.

$$\frac{-x-5}{2\sqrt{x}(x-5)^2}=0\,;-x-5=0\,;x=-5$$

El valor x = -5 no pertenece al dominio de la función, por lo que:

| | (0,5) | (5,+∞) |
|---|---|---|
| f´(x) | **–** | **–** |
| f(x) | decrece | crece |

- Concavidad y convexidad

$$f\,'(x)=\frac{-x-5}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$$

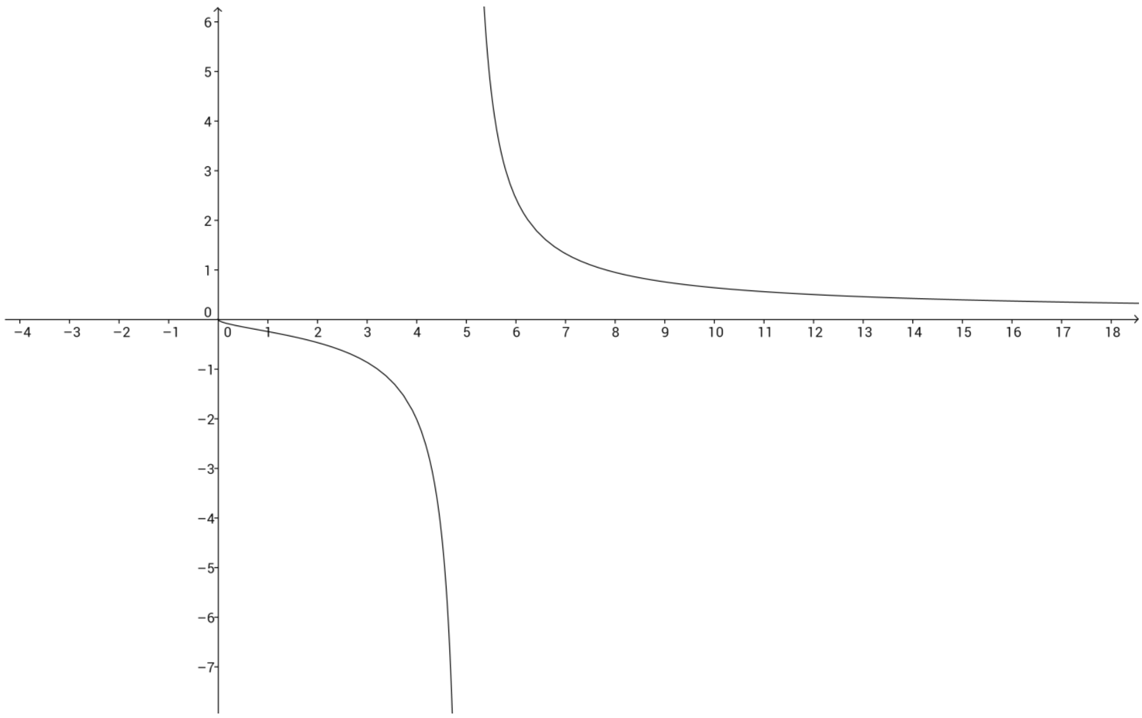
$$f\,''(x)=\frac{-\left[2\sqrt{x}(x-5)^2\right]-(-x-5)\left[2\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-5)^2+2\sqrt{x}\,2(x-5)\right]}{\left[2\sqrt{x}(x-5)^2\right]^2}$$

$$f\,''(x)=\frac{-\left[2\sqrt{x}(x-5)\right]-(-x-5)\left[\frac{(x-5)}{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\right]}{(2\sqrt{x})^2(x-5)^3}=\frac{3x^2+30x-25}{4x\sqrt{x}(x-5)^3}$$

$$\frac{3x^2+30x-25}{4x\sqrt{x}(x-5)^3}=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2+30x-25=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-30\pm\sqrt{1200}}{9}$$

Sólo tomamos el valores positivo de la solución porque evaluamos en los reales (+).

| | $\left(0,\ \frac{-30+\sqrt{1200}}{9}\right)$ | $\left(\frac{-30+\sqrt{1200}}{9},5\right)$ | (5,+∞) |
|---|---|---|---|
| f´´(x) | **+** | - | **+** |
| f(x) | **U** | ∩ | U |


6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

# Hoja 2. Problema 4

# Resuelto por Carmen Martín Rubio (enero 2015)

**4. Estudia y representa** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}$

**Dominio →** Todo R excepto donde se anula el denominador o hay raíz de un número negativo. Es decir: $D_f$ = $(0,\infty)$ .

**Continuidad →** Función continua en todo su dominio.

**Puntos de corte con los ejes**

Eje X → Para y=0 → $0=\dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}$ → 0 = $\sqrt{x}+x$ → No corta eje de abscisas, ya que x = 0 no pertenece al dominio de la función.

Eje Y → Para x=0 → no pertenece al dominio de la función → no hay corte con eje OY

**Simetría →** No tiene.

**Asíntotas**

Asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}=\dfrac{0}{0}$ → Dividimos todo por $x^2$ → el límite tiende a $+\infty$

No hacemos límite por 0⁻ porque la función no está definida para dicho valor.

Hay asíntota vertical en x=0

Asíntota horizontal

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}=0$

Hay asíntota horizontal en y = 0.

Asíntota oblicua → No hay porque existe asíntota horizontal.

**Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos**

Hallamos la primera derivada y la igualamos a 0 para hallar los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+x}{x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)x^2-(\sqrt{x}+x)2x}{x^4} \rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)x-(\sqrt{x}+x)2}{x^3}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{2\sqrt{x}}+x\right)-2\sqrt{x}-2x}{x^3} \rightarrow f'(x)=\frac{\frac{x-2x\sqrt{x}-4x}{2\sqrt{x}}}{x^3} \rightarrow f'(x)=\frac{x-2x\sqrt{x}-4x}{2x^3\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x-2x\sqrt{x}}{2x^3\sqrt{x}}$$

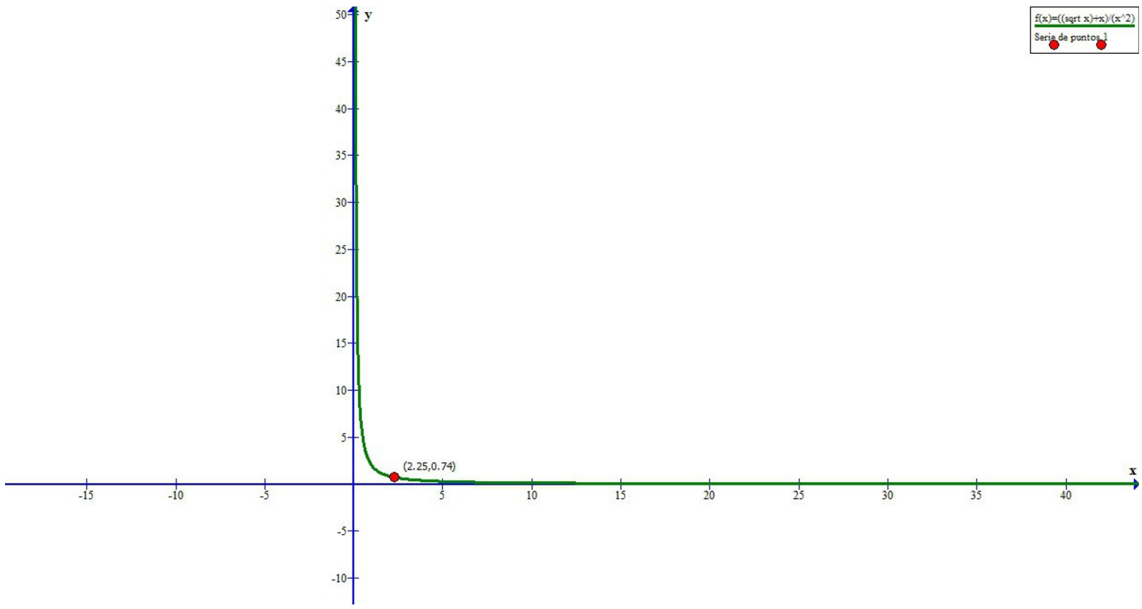
Igualamos a 0 → $0= -2x\sqrt{x}-3x$ → $0= x(-2\sqrt{x}-3)$

x= 0 → La función no está definida en ese punto.

$+\sqrt{x}\neq\frac{-3}{2}$ → El valor positivo de una raíz no puede ser igual a un número negativo, por lo que es un absurdo matemático.

Por lo tanto, no tenemos puntos candidatos a extremos relativos.

Si evaluamos la derivada en un punto cualquiera del dominio, por ejemplo x = 10, comprobamos que es negativa, por lo que la función es decreciente en todo su dominio.



## Hoja 2. Problema 5

## Resuelto por María Moreno Lemos (enero 2015)

**5. Estudia y representa** $f(x)= x\sqrt{x^2-1}$

**Dominio de f(x):** Todo x que pertenece al intervalo (-∞,-1), (1,∞) porque el radicando tiene que ser ≥ 0

**Puntos de corte con los ejes:**

Eje OX: y = 0 → $x\sqrt{x^2-1}=0$

→ x = 0 no pertenece al intervalo.

→ $\sqrt{x^2-1}=0$ → Los puntos serían (-1,0) y (1,0)

Eje OY: x = 0 → no pertenece al dominio de la función

**Asíntotas:**

- Asíntota vertical: $\lim_{x\to k} f(x)= \infty$ → x = k

  $\lim_{x\to k}(x\sqrt{x^2-1})$ no existe porque no hay ningún numero para esta función que haga al limite infinito.

- Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$ → y = k

  $\lim_{x\to\infty} x\sqrt{x^2-1} \to \infty\cdot\infty= \infty$ por tanto no existe asíntota horizontal.

- Asíntota oblicua: y = m·x + n

  $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ $\qquad n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-\mathrm{mx}]$

  $m=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x^2-1}}{x} \to \lim_{x\to\infty} x\sqrt{x^2-1} \to \infty\cdot\infty=\infty$ → no existe asíntota oblicua.

**Extremos relativos, crecimiento y decrecimiento:** f'(x) = 0

$f'(x)=\sqrt{x^2-1}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0 \to f'(x)=\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}=0 \to 2x^2=1 \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Estos puntos no pertenecen al dominio de f(x): no existen extremos relativos.

-

Para $x \geq 1$ cuando x crece f(x) crece → por lo tanto es creciente.
Para $x \leq 1$ cuando x decrece f(x) decrece → por lo tanto es creciente.

**Puntos de inflexión, concavidad y convexidad:** f''(x) = 0

$$f''(x)=\frac{4x\sqrt{x^2-1}-(2x^2-1)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=0$$

$$f''(x)=\frac{2x^2-3}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=0 \rightarrow \quad 2x^2=3 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

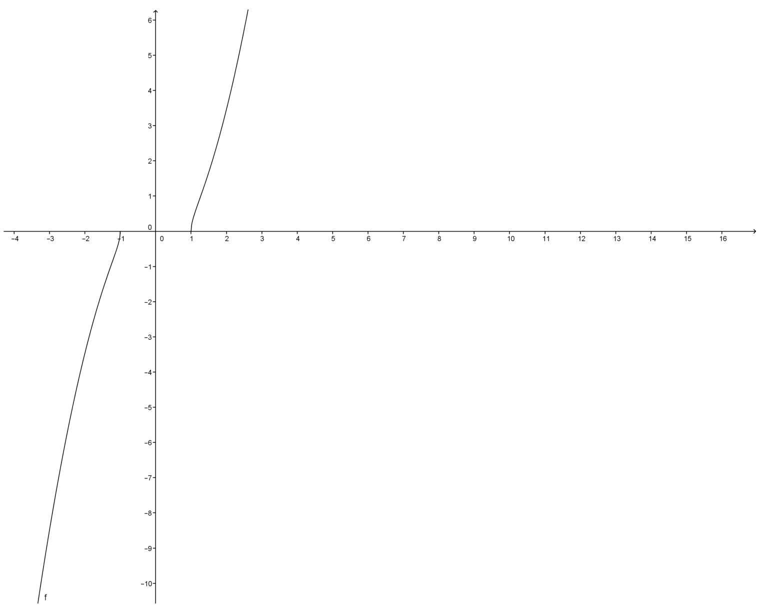
Para valores inferiores a $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\rightarrow$ $f''(x)>0$ cóncava

Para valores pertenecientes a $(-\sqrt{\frac{3}{2}},-1)$ $\rightarrow$ $f''(x)<0$ convexa

Para valores pertenecientes a $(1,\sqrt{\frac{3}{2}})$ $\rightarrow$ $f''(x)>0$ cóncava

Para valores mayores a $\sqrt{\frac{3}{2}}$ $f''(x)<0$ convexa

**Simetría:**
f(x) = -f(-x) → simétricaa respecto al origen (0,0)



# Hoja 2. Problema 6

# Resuelto por Sara Aparicio (enero 2015)

**6. Estudia y representa** $f(x)=3x^4-4x^3$

Dominio → todo R (por ser polinómica)

Puntos de corte:

- ✓ Eje OY → f(0) = 0 → **(0,0)**
- ✓ Eje OX → $3x^4-4x^3=0$ → **(0, 0), (0, 4/3)**

Signo de la función:

$(\infty,0)>0$

$\left(0,\frac{4}{3}\right)<0$

$\left(\frac{4}{3},\infty\right)>0$

Simetría:

No es simétrica

No periódica

Asíntotas:

- Verticales: No hay al estar definida en todo R y ser continua en todo su dominio
- Horizontales: No hay por ser polinómica → diverge en el infinito
- Oblicua: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x^3-4x^2 = \infty$ → no hay asíntota oblícua

Máximos y mínimos: $f'(x)=12x^3-12x^2$

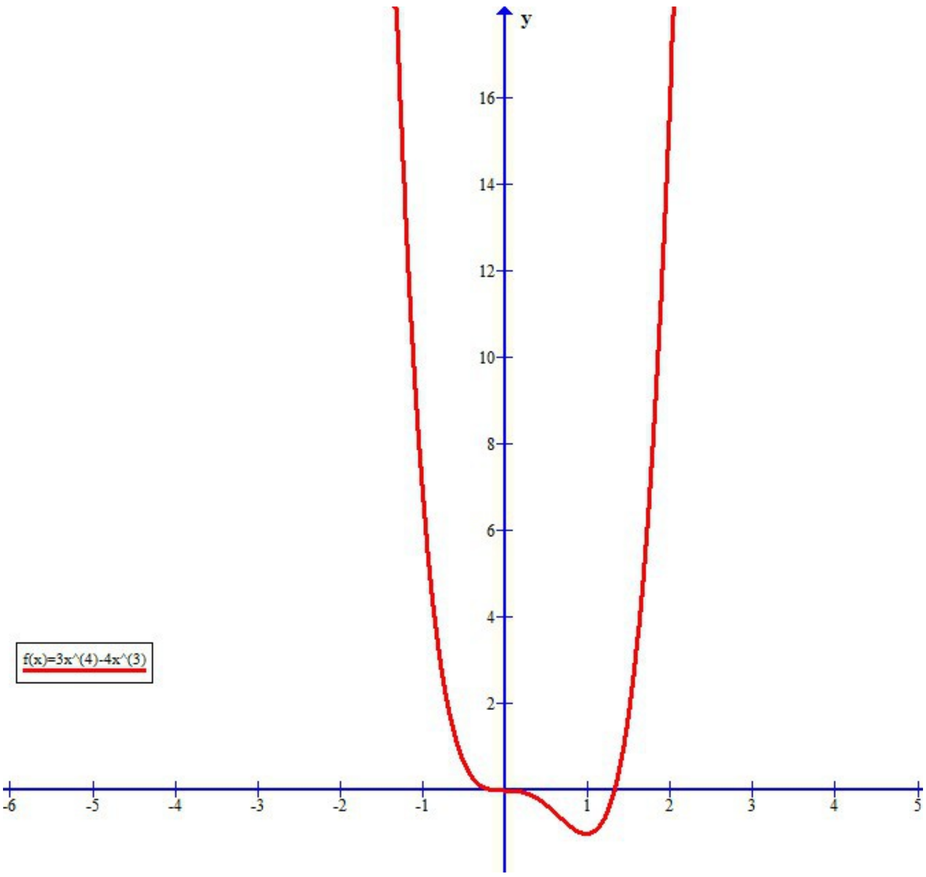
| $(\infty,0)$ | $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ | $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$ |
|---|---|---|
| f '(x) < 0 | f '(x) < 0 | f '(x) > 0 |
| f(x) decreciente | f(x) decreciente | f(x) creciente |

f(4/3) = 64/9

Hay un mínimo en el punto $\left(\frac{4}{3},\frac{64}{9}\right)$

<u>Concavidad y convexidad:</u> $f''(x)=36x^2-24x=0$ → x = 0, $x=\frac{2}{3}$

| $(\infty,0)$ | $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ | $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ |
|---|---|---|
| f ''(x) > 0 | f ''(x) < 0 | f ''(x) > 0 |
| Convexa | Cóncava | Convexa |



## Hoja 2. Problema 7

## Resuelto por Ignacio Roldán (diciembre 2014)

**7. Estudia y representa** $f(x)=x^4-6x^2+5x+2$

- **Dominio de la función**

Df= R ➔ ya que es una función polinómica

- **Continuidad de la función**

Continuidad= R ➔ ya que es una función polinómica

- **Puntos de corte(OX,OY)**

Puntos de corte eje OY (x=0)➔ $y=0-0+0+2 \rightarrow y=2$ A(0,2)

Puntos de corte eje OX (y=0)➔ $x^4-6x^2+5x+2=0$

Como no tengo la solución aproximamos por el teorema de Bolzano, buscando un intervalo cerrado donde la función sea continua y cambie de signo al ser evaluada en los extremos del intervalo

$$g(x)=x^4-6x^2+5x+2=0$$

[0,-2] ➔ cojo el valor -1= g(x)<0
[0,-1] ➔ cojo el valor -0.5= g(x)<0
[0,-0.5]➔ cojo el valor-0.4= g(x)<0
[0,-0.3]➔ cojo el valor -0.3=g(x)<0
[0,-0.2] ➔ cojo el valor -0.2=g(x)>0

$x\simeq-0{,}3$

$$g(x)=x^4-6x^2+5x+2=0$$

[-2,-4] ➔ cojo el valor-3=g(x)>0
[-2,-3] ➔ cojo el valor -2.8=g(x)>0
[-2,-2.8]➔ cojo el valor -2.7=g(x)<0

$x\simeq-2{,}7$

Al ser un polinomio de grado cuatro, como máximo, tendra cuatro soluciones (cuatro raíces). Con los dos puntos de corte obtenidos, por ahora, tenemos suficiente para seguir estudiando nuestra función y poder pintarla.

- **Asintotas**

  ✓ Asintota vertical(A.V)

  No existe ya que la función no se anula en ningun punto

  ✓ Asintota horizontal(A.H)

$$\lim_{X\to\infty} x^4-6x^2+5x+2=\infty$$
$$\lim_{X\to 0} x^4-6x^2+5x+2=-\infty$$

No existe A.H

  ✓ Asintota oblicua(A.O)

$$\lim_{X\to\infty} \frac{x^4-6x^2+5x+2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^4-6x^2+5x+2=\infty$$

No existe A.O

- **Crecimiento, máximos y mínimos**

Realizo la primera derivada:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3-12x+5 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}$$

$$g(x)=4x^3-12x+5=0$$

Aplicamos de nuevo el teorema de Bolzano, para obtener la aproximación de los candidatos a puntos críticos: x= -1.9, x=0.4, x=1.5

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (∞,-1.9) | -1.9 | (-1.9,0.4) | 0.4 | (0.4,1.5) | 1.5 | (1.5, ∞) |
| f’(-2)=- | (0,-16,13) | f’(0)=+ | (0,3.07) | f’(1)=- | (0,1.06) | f’(2)=+ |

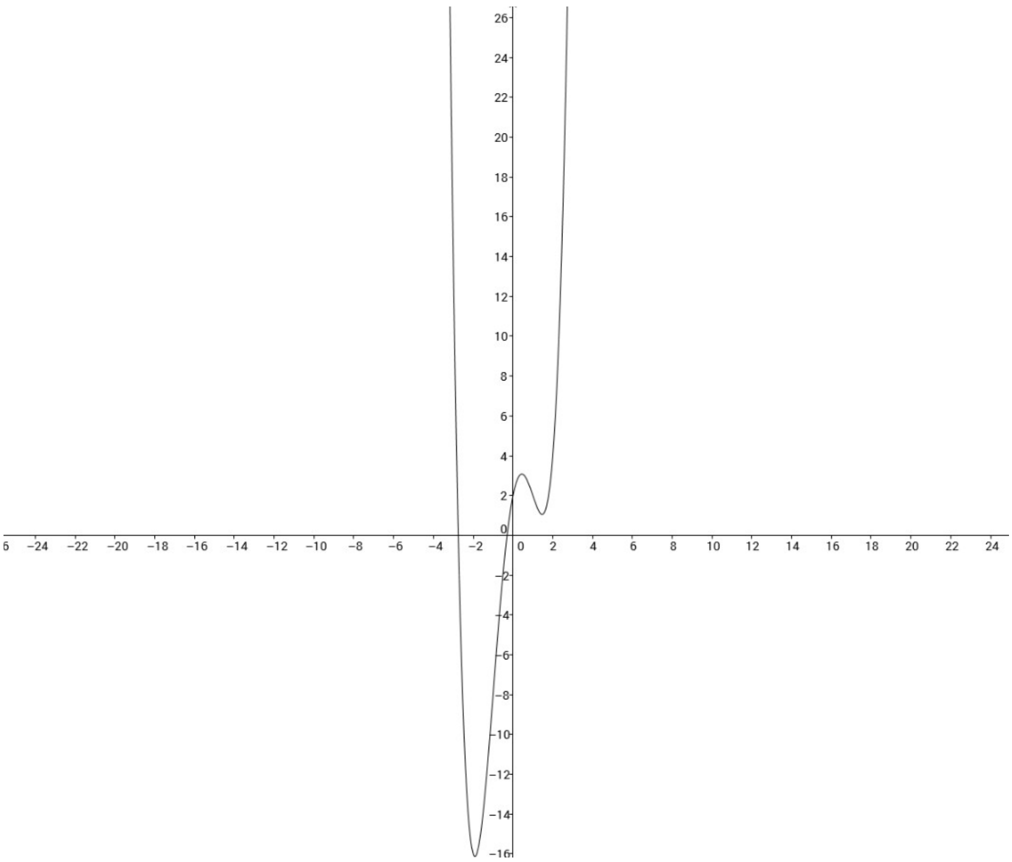
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Decreciente | **Mín** | Creciente | **Máx** | Decreciente | **Mín** | Creciente |

- **Concavidad , convexidad y puntos de inflexión**

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=12x^2-12 \\ f''(x)=0 \end{array}\right\}$$

$$12x^2-12=0 \rightarrow x^2=\pm 1$$

| (∞,-1) | -1 | (-1,1) | 1 | (1, ∞) |
|---|---|---|---|---|
| f'(-2)=+ | (0,-8) | f'(0)=- | (0,2) | f'(2)=+ |
| Convexa | Punto de inflexión | Cóncava | Punto de inflexión | Convexa |


26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
−16
−24 −22 −20 −18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

## Hoja 2. Problema 8

## Resuelto por Isabel Navarro-Pelayo Torres (diciembre 2014)

**8. Estudia y representa f (x )=** $\frac{x}{(x+1)^2}$

Estudio de la función:

- Dominio: Dom f(x)= $R-\{-1\}$ ➔ Todo R salvo donde se anula el denominador
- Asíntota Vertical (A.V.):

Para que exista A.V. se debe cumplir que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$
En x=-1 el denominador vale cero, por tanto:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x+1)^2}=\frac{x}{0^+}=+\infty$$

**Existe asíntota vertical en x=-1**

- Asíntota Horizontal (A.H.):

Para que exista A.H. se debe cumplir que $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1-0-0}=\frac{0}{1}=0$$

**Existe asíntota horizontal en y=0**

- Asíntota oblicua (A.O.):

Asíntota oblicua: y= mx + n

$$m=\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)^2}=0$$

**Como m debe dar un número finito y distinto de 0, no hay asíntota oblicua.**

- Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

Calculamos la primera derivada y, a continuación, la igualamos a cero para calcular los puntos críticos (valores en los que la primera derivada se anula):

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2-2x(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)-2x}{(x+1)^3}=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=0$$

$$1-x=0\rightarrow x=1$$

Estudiemos el comportamiento de la primera derivada a la izquierda y a la derecha de ese valor crítico **x=1**, y así sabremos el crecimiento o decrecimiento de la función.
Recordamos que la función no está definida en **x=-1.**

| x | $(-\infty,-1)$ | $(-1,1)$ | $1$ | (1, $\infty$ ) |
|---|---|---|---|---|
| y' | Negativa | Positiva | 0 | Negativa |
| y | Decreciente | Creciente | **MÁXIMO** | Decreciente |

- Concavidad, convexidad y puntos de inflexión:

Calculamos la segunda derivada e igualamos a cero para calcular los puntos de inflexión:

$$f'(x)=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-(x+1)^3-3(x+1)^2(1-x)}{(x+1)^6}=\frac{-x-1-3(1-x)}{(x+1)^4}=\frac{-x-1-3+3\text{x}}{(x+1)^4}=\frac{2\text{x}-4}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=o\rightarrow 2\text{x}-4=0\rightarrow x=2$$

Estudiemos el comportamiento de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de ese valor **x=2**, y así sabremos la concavidad o convexidad de la función. Recordamos que la función no está definida en **x=-1.**

| x | $(-\infty,-1)$ | $(-1,2)$ | 2 | (2, ∞ ) |
|---|---|---|---|---|
| y'' | Negativa | Negativa | 0 | Positiva |
| y | Cóncava | Cóncava | **Punto de inflexión** | Convexa |

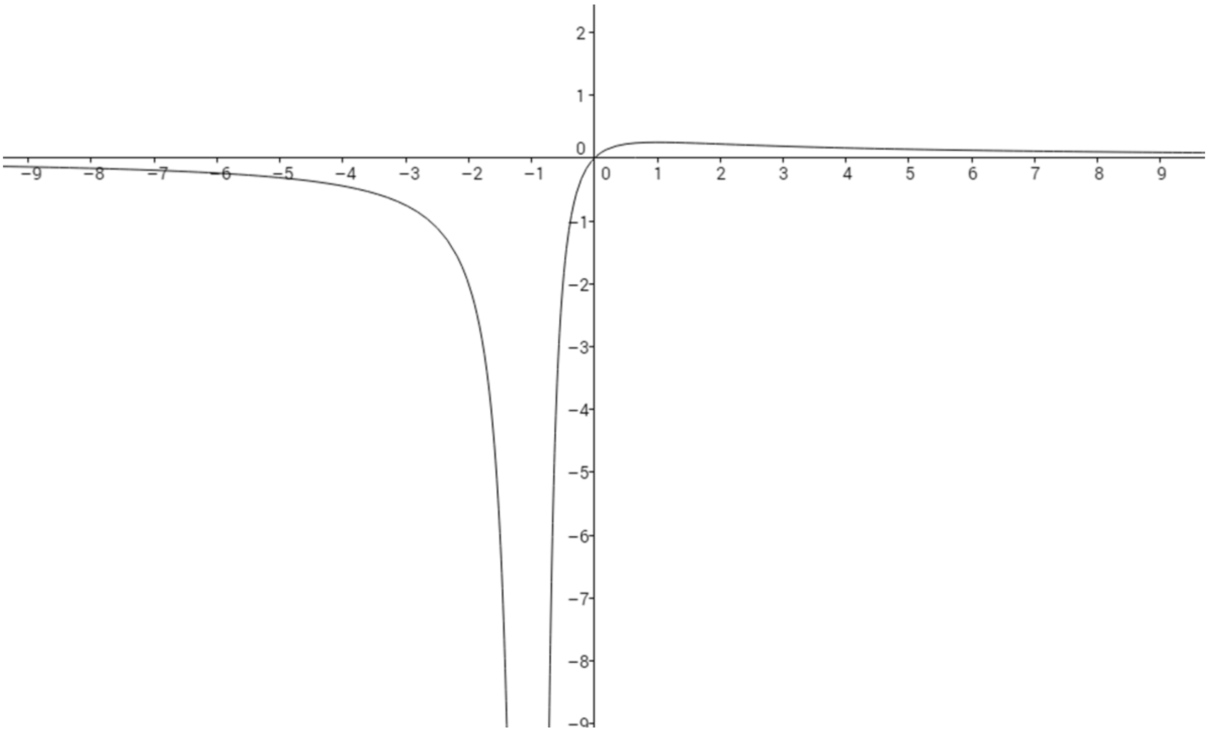
Para ratificar que en x=2 hay un punto de inflexión hacemos la tercera derivada, la cual evaluada en ese punto debe darnos distinto de 0.

$$f'''(x)=\frac{2(x+1)^4-4(x+1)^3(2\text{x}-4)}{(x+1)^8}=\frac{2\text{x}+2-8\text{x}+16}{(x+1)^5}=\frac{-6\text{x}+18}{(x+1)^5}$$

$$f'''(2)=\frac{6}{3^5}\neq 0$$

**Por tanto, x=2 es un punto de inflexión.**

**<u>Representación de la función</u>**


2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## Hoja 2. Problema 10

## Resuelto por María Olivares Guerrero (enero 2015)

**10. Estudia y representa** $f(x)=x+\frac{1}{e^x}$

Dominio de la función: R

Puntos de corte:

Con el eje OX → y=0 → $\frac{e^x\ x+1}{e^x}=0 \rightarrow e^x\ x+1=0$

Estudiamos el comportamiento de esta función, que llamaremos $g(x)$ , para comprobar que no tiene solución.

$g(x)=e^x\ x+1$

$g'(x)=e^x(1+x) \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow e^x(1+x)=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow f(-1)=-1+e>0$

Evaluamos la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico $(-1,e-1)$ para determinar si es máximo o mínimo:

$g'(-10)<0$

$g'(0)>0$

Por lo tanto $(-1,e-1)$ es un mínimo ==> $g(x)=e^x\ x+1$ nunca corta al eje horizontal OX ==> nuestra función de partida no corta al eje OX

Con el eje OY → x = 0 → $(0,1)$

Asíntotas

No hay asíntota vertical por ser la función continua en todo R.

$\lim_{x\to\infty} x+\frac{1}{e^x}=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x+\frac{1}{e^x}=-\infty$

Por lo tanto, no hay asíntota horizontal.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{e^x}}{x}=\frac{\infty}{\infty}$ → L'Hôpital → $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{e^x}{e^{2x}}}{1}=1$ → m = 1

$$n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Tenemos asíntota oblícua y = x (si x tiende a infinito; si tiende a menos infinito, no hay asíntota oblícua ya que ahí la función tiende a infinito).

Crecimiento

$$f(x)=x+\frac{1}{e^x} \quad \to \quad f'(x)=1-\frac{1}{e^x} \quad \to \quad f'(x)=0 \quad \to \quad 1=\frac{1}{e^x} \quad \to \quad x=0 \quad \to \quad (0,1)$$

Tenemos un punto crítico $(0,1)$ candidato a extremos relativo. Evaluamos la derivada a izquierda y derecha de x = 0.

$$f'(-10)=1-\frac{1}{e^{-10}}<0$$

$$f'(10)=1-\frac{1}{e^{10}}>0$$

Por lo tanto en $(0,1)$ tenemos un mínimo relativo

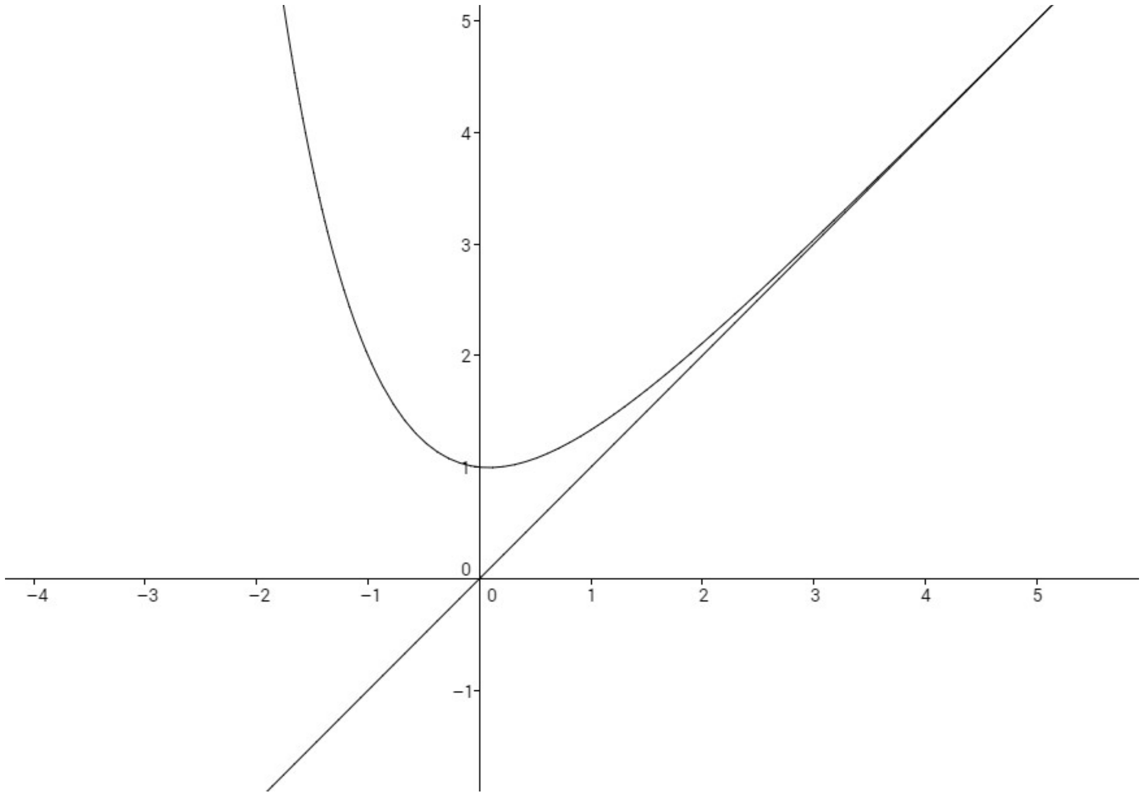
Curvatura

Realizamos la segunda derivada

$$f''(x)=\frac{1}{e^x}$$

La segunda derivada nunca se anula, por lo que no existen puntos de inflexión.

Con esta información, ya podemos representar nuestra gráfica.


5
4
3
2
1
0
−1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5