Problemas – Tema 4

Solución a problemas de Repaso y Ampliación 1ª Evaluación - Hoja 08 - Problemas 3

Hoja 8. Problema 3

Resuelto por Pablo Martínez Peregrina (enero 2015)

3. Demostrar que todo número positivo posee una raíz cuadrada.

Sea n>0 nuestro número positivo. Tenemos que demostrar que existe un número real x tal que:

$n=x^2 \longrightarrow \sqrt{n}=x$

La ecuación $x^2=n$ es equivalente a la $x^2-n=0$, luego tengo que demostrar que $g(x)=x^2-n$ tenga solución real.

Tomemos el intervalo $[0,n]$, que cumple:

$g(0)=0-n<0$

$g(n)=n^2-n>0$ → siempre que n sea mayor que 1

Por lo tanto, si n es mayor que 1, podemos aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo $[0,n]$, donde la función $g(x)=x^2-n$ es continua por ser polinómica:

$\exists c \in (0,n) / g(c)=0 \rightarrow \exists c \in (0,n) / x^2-n=0 \rightarrow \exists c \in (0,n) / x^2=n$

En el caso $0<n<1$ tomaremos el intervalo $[0,1]$. De esta forma:

$g(0)=0-n<0$

$g(1)=1-n>0$

Y por Bolzano podremos afirmar:

$\exists c \in (0,1) / g(c)=0 \rightarrow \exists c \in (0,1) / x^2-n=0 \rightarrow \exists c \in (0,1) / x^2=n$