Problemas – Tema 5

Solución a problemas de Integrales - Hoja 14 - Problemas 1, 2, 3

Hoja 14. Problema 1

Determina la ecuación de la curva $F(x)$ que verifica que $F(1)=2$, $F'(0)=3$ y $F''(x)=12x+3$.

Nos dan la segunda derivada de una función. Por lo tanto, debemos integrar dos veces.

$$F'(x)=\int F''(x)\,dx \rightarrow F'(x)=\int (12x+3)\,dx=6x^2+3x+C$$

Utilizamos la condición de contorno $F'(0)=3$ para obtener la constante de integración C .

$$F'(0)=3 \rightarrow 0+0+C=3 \rightarrow C=3 \rightarrow F'(x)=6x^2+3x+3$$

Volvemos a integrar.

$$F(x)=\int F'(x)\,dx \rightarrow F(x)=\int (6x^2+3x+3)\,dx=2x^3+\frac{3x^2}{2}+3x+D \quad .$$

Aplicamos la segunda condición de contorno para obtener D .

$$F(1)=2 \rightarrow 2\cdot 1+\frac{3\cdot 1}{2}+3\cdot 1+D=2 \rightarrow D=\frac{-9}{2} \rightarrow F(x)=2x^3+\frac{3x^2}{2}+3x-\frac{9}{2}$$

Hoja 14. Problema 2

Determina la ecuación de la curva $F(x)$ que verifica que $F(0)=-5$, tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=2$ y $F''(x)=6x^2-12x$.

El mínimo relativo genera la condición $F'(0)=2$, ya que la primera derivada se anula en un extremo relativo.

Debemos integrar dos veces y aplicar las dos condiciones de contorno para determinar, de manera única, las constantes de integración.

$$F'(x)=\int F''(x)dx \quad \rightarrow \quad F'(x)=\int (6x^2-12x)dx=2x^3-6x^2+C$$

$$F'(0)=2 \quad \rightarrow \quad 0-0+C=2 \quad \rightarrow \quad C=2 \quad \rightarrow \quad F'(x)=2x^3-6x^2+2$$

Integramos nuevamente.

$$F(x)=\int F'(x)dx=\int (2x^3-6x^2+2)dx=\frac{x^4}{2}-2x^3+2x+D$$

$$F(0)=-5 \quad \rightarrow \quad 0-0+0+D=-5 \quad \rightarrow \quad D=-5 \quad \rightarrow \quad F(x)=\frac{x^4}{2}-2x^3+2x-5$$

Hoja 14. Problema 3

Resuelve.

a) $\int arcosen(x)dx$

b) $\int x \cdot arcotg(x)dx$

c) $\int x \cdot 2^x \cdot 3^x dx$

a) $\int arcosen(x)dx$ → Resolvemos por partes → $I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$

$$u=arcosen(x) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v'=1 \quad \rightarrow \quad v=x$$

$$I=x\cdot arcosen(x)-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\cdot arcosen(x)-\cdot\frac{2}{-2}\int \frac{-2x}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$I=x\cdot arcosen(x)+\sqrt{1-x^2}+C$$

b) $\int x \cdot arcotg(x)dx$ → Integramos por partes → $I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$

$$u=arcotg(x) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$v'=x \quad \rightarrow \quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$I=\frac{x^2 arcotg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2 arcotg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$I=\frac{x^2 arcotg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\int \frac{-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2 arcotg(x)}{2}-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$I=\frac{x^2 arcotg(x)}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arcotg(x)+C$$

c) $\int x\cdot 2^x\cdot 3^x\,dx=\int x\cdot(2\cdot 3)^x\,dx=\int x\cdot(6)^x\,dx$ → Aplicamos partes

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$u=x \quad\rightarrow\quad u'=1$$

$$v'=6^x \quad\rightarrow\quad v=\frac{6^x}{\ln(6)}$$

$$I=\frac{x6^x}{\ln(6)}-\frac{1}{\ln(6)}\int 6^x\,dx=\frac{x6^x}{\ln(6)}-\frac{6^x}{[\ln(6)]^2}+C$$