Problemas – Tema 6

Solución a problemas de Sistemas de ecuaciones - Hoja 13 - Todos resueltos

Hoja 13. Problema 1

1. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **resolver la ecuación** $A\cdot X=B$

Estos problemas de ecuación matriciales se puedne resolver de dos formas:

- Colocando incógnitas en los elementos de $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, operar y resolver el sistema resultante.

- Aplicar matriz inversa y despejar X , de la forma: $X=A^{-1}B$

La primera opción es práctica para matrices 2×2 ya que resulta un sistema 4×4 que no suele ser difícil de resolver. Pero para matrices $3x3$ es poco práctico porque genera un sistema 9×9 largo de resolver.

La segunda opción se puede aplicar siempre que exista la inversa A^{-1} . Si esta inversa existe, la solución de X será única y podremos aplicar este método. Si no existe A^{-1} la solución de X no será única y solo podremos resolverla con la primera opción, dando incógnitas a los elementos de X .

Este ejercicio lo vamos a resolver de las dos maneras.

$$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad , \quad A\cdot X=B \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Igualamos cada coeficiente de las matrices, y obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 2x+3z=3 \\ 2y+3t=1 \\ x+2z=2 \\ y+2t=-5 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la tercera } \; x=2-2z \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix} 2(2-2z)+3z=3 \\ 2y+3t=1 \\ y+2t=-5 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la primera } \; z=1$$

$$\begin{Bmatrix} 2y+3t=1 \\ y+2t=-5 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la segunda } \; y=-5-2t \;\rightarrow \text{En la primera } \; 2(-5-2t)+3t=1 \;\rightarrow\; t=-11$$

La solución general es:

$$x=0,\ y=17, z=1\ , t=-11 \quad \rightarrow \quad X=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

Otra forma de resolverlo es con matriz inversa. Para ello debe existir A^{-1} . Repito, si no existe, no podríamos resolverlo de esta segunda forma.

Cuando aprendamos determinantes veremos una manera muy directa de comprobar que una matriz admite o no inversa (viendo si su determinante es no nulo). Con lo que sabemos de matrices podemos verificar si admite inversa viendo si el rango de la matriz es 2, es decir, si los dos vectores que forman la matriz son linealmente independientes.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad ¿\exists A^{-1}?$$

Cuando son dos vectores la forma más directa de ver que no son proporcionales es diviendo sus componentes $\rightarrow$ $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ Al no cumplirse la igualdad no son proporcionales, es decir, son independientes y el rango de la matriz vale dos.

Si la matriz hubiese sido 3×3 tendríams que haber obtenido la matriz triangular y el número de filas no nulas sería igual al número de vectores linealmente independientes.

Ya sabemos que admite inversa. Ahora hay que calcularla. Podemos aplicar el método directo para obtener la inversa o bien Gauss-Jordan.

El método directo es práctico para matrices 2×2 mientras que Gauss-Jordan suele ser más práctico para matrices de orden superior.

Apliquemos en nuestro caso el método directo.

$$A A^{-1}=I \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} 2a+3c=1 \\ 2b+3d=0 \\ a+2c=0 \\ b+2d=1 \end{Bmatrix}$ → De la tercera $a=-2c$ → $\begin{Bmatrix} 2(-2c)+3c=1 \\ 2b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{Bmatrix}$ → De la primera $c=-1$

$\begin{Bmatrix} 2b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{Bmatrix}$ → De la segunda $b=1-2d$ → En la primera $2(1-2d)+3d=0 \rightarrow d=2$

La matriz inversa queda $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Podemos obtener la matriz incógnita:

$$X = A^{-1}B \quad \rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

Dos métodos distintos para resolver el ejercicio. Como hemos explicado, lo importante es tener claro cuando suele ser más práctico aplicar un método u otro.

Hoja 13. Problema 2

2. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **resolver la ecuación** $X\cdot A+B=C$

Llamamos $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ y operamos.

$$X\,A=C-B \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}x+y & x+2y\\ z+t & z+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Igualamos componentes y formamos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{Bmatrix}x+y=-1\\ x+2y=1\\ z+t=1\\ z+2t=-2\end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la tercera} \quad z=1-t \;\rightarrow\; \begin{Bmatrix}x+y=-1\\ x+2y=1\\ 1-t+2t=-2\end{Bmatrix} \rightarrow \text{De la tercera} \quad t=-3$$

$$\begin{Bmatrix}x+y=-1\\ x+2y=1\end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \quad -y=-2 \;\rightarrow\; y=2 \;\rightarrow \text{En la primera} \quad x=-3$$

La matriz solución resulta $X=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$

Hoja 13. Problema 3

3. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ **resolver la ecuación:**

a) $X\cdot A=B+I$

b) $AX+BX=C$

c) $XAB-XC=2C$

a) $X\cdot A=B+I$ → si existe A^{-1} → $X=(B+I)A^{-1}$ (fíjate que la inversa se aplica por la derecha)

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ → sus vectores no son proporcionales porque $\frac{1}{3}\neq\frac{1}{4}$ → rango 2 → existe A^{-1}

$AA^{-1}=I$ → $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{Bmatrix}a+c=1\\ b+d=0\\ 3a+4c=0\\ 3b+4d=1\end{Bmatrix}$ → De la primera $a=1-c$ → $\begin{Bmatrix}b+d=0\\ 3(1-c)+4c=0\\ 3b+4d=1\end{Bmatrix}$ → De la segunda $c=-3$ →

$\begin{Bmatrix}b+d=0\\ 3b+4d=1\end{Bmatrix}$ → De la primera $b=-d$ → En la segunda $-3d+4d=1$ → $d=1$

La matriz inversa resulta $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$X=(B+I)A^{-1}$ → $X=[\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}]\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ → $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}12-3 & -3+1\\ 4-6 & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

b) $AX+BX=C$ → Sacamos factor común por la derecha → $(A+B)X=C$ → $X=(A+B)^{-1}C$

Fíjate que aplicamos inversa por la izquierda.

Podremos resolver de esta forma si existe la inversa $(A+B)^{-1}$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

$(A+B)$ Admite inversa porque el rango es 2 al tener dos vectores indepedientes → $\frac{3}{4}\neq\frac{2}{5}$

$$(A+B)(A+B)^{-1}=I \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}3a+2c & 3b+2d\\ 4a+5c & 4b+5d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}3a+2c=1\\ 3b+2d=0\\ 4a+5c=0\\ 4b+5d=1\end{cases}$ → De la tercera $a=\frac{-5}{4}c$ → $\begin{cases}3(\frac{-5}{4}c)+2c=1\\ 3b+2d=0\\ 4b+5d=1\end{cases}$ →

→ De la primera $\frac{-15}{4}c+2c=1 \;\rightarrow\; c=\frac{-4}{7} \;\rightarrow\; \begin{cases}3b+2d=0\\ 4b+5d=1\end{cases}$ → De la primera $b=\frac{-2}{3}d$

$$\rightarrow\; 4(\frac{-2}{3}d)+5d=1 \;\rightarrow\; \frac{-8}{3}d+5d=1 \;\rightarrow\; d=\frac{3}{7}$$

La matriz inversa resulta $(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & \frac{-2}{7}\\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$

$$X=(A+B)^{-1}C=\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & \frac{-2}{7}\\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{7}-\frac{2}{7} & \frac{10}{7}-\frac{6}{7}\\ \frac{-4}{7}+\frac{3}{7} & \frac{-8}{7}+\frac{9}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

c) $XAB-XC=2C$ → Sacamos factor común por la izquierda → $X(AB-C)=2C$

$X=2C(AB-C)^{-1}$ → Podremos resolver de esta forma si existe la inversa $(AB-C)^{-1}$

Fíjate que en esta ocasión hemos aplicado inversa por la derecha.

$$AB-C=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1&1+1\\6+4&3+4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\10&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\9&4\end{pmatrix}$$

La matriz $AB-C=\begin{pmatrix}2&0\\9&4\end{pmatrix}$ admite inversa, ya que el rango es dos por ser sus vectores linealmente independientes, ya que no son proporcionales → $\frac{2}{9}\neq\frac{0}{4}$. Calculemos su inversa.

$$(AB-C)(AB-C)^{-1}=I \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}2&0\\9&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{Bmatrix}2a=1\\2b=0\\9a+4c=0\\9b+4d=1\end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad a=\frac{1}{2},\ b=0$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{9}{2}+4c=0\\4d=1\end{Bmatrix} \quad\rightarrow$$

La matriz inversa resulta → $(AB-C)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{-9}{8}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

La matriz solución resulta → $X=2C(AB-C)^{-1} \quad\rightarrow\quad X=2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{-9}{8}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

$$X=2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{9}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-\frac{27}{8}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{-7}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{-23}{8}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7}{2}&1\\\frac{-23}{4}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Hoja 13. Problema 4

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ **resolver la ecuación** $AX+2B=3C$

$$AX+2B=3C \rightarrow AX=3C-2B \rightarrow X=A^{-1}(3C-2B)$$

Si existe la inversa A^{-1} podremos resolver de esta forma.

La matriz A ya es triangular (en este caso, triangular superior). Por lo que no debemos aplicar Gauss para obtener la matriz triangular. Como tenemos tres filas no nulas en la matriz triangular, el rango de la matriz es 3. Como el rango coincide con la dimensión, podemos afirmar que la matriz admite inversa.

Para calcular A^{-1} vamos a aplicar el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right) \rightarrow F_2'=F_2-F_1 \ , \ F_3'=F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$F_3'=F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right) \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Podemos resolver nuestra ecuación matricial.

$$X=A^{-1}(3C-2B) \rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\3&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&3&0\\3&0&1\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-5&5&2\\5&-3&1\end{pmatrix}$$