Teoría – Tema 7

Operar con matrices

Índice de contenido

Concepto de matriz

Consideremos el cuerpo ℝ de los números reales. Una tabla de $m \times n$ números dispuestos en m filas y n columnas de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Recibe el nombre de matriz de orden $m \times n$ de números reales.

El elemento a_{ij} ocupa el lugar determinado por la fila i y la columna j .

Otra forma de denotar la matriz arbitraria A , de manera más compacta, es $A=(a_{ij})$. Sobreentendiéndose que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ se representa por $M_{m,n}$ o bien $M_{m \times n}$.

Si en una matriz el número de filas es igual al número de columnas, $m=n$, se dice que es una **matriz cuadrada de orden** n . El conjunto de todas las matrices de orden $n \times n$ se representa por $M_{n,n}$, por $M_{n \times n}$ o bien simplemente M_n .

Si el número de filas no coincide con el número de columnas, $m \neq n$, se dice que la **matriz es rectangular de orden** $m \times n$.

Si la matriz solo posee una fila, $m=1$, se habla de matriz fila. Si la matriz solo posee una columna, $n=1$, se habla de matriz columna. Cuando trabajemos con espacios vectoriales, diremos que las matrices filas y las matrices columnas representan un vector. Pero eso será en temas posteriores del curso.

Igualdad de matrices. Dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ de orden $m \times n$ son iguales si y solo si son iguales todos los elementos que ocupan las mismas posiciones. Es decir $A=B$ <==> $(a_{ij})=(b_{ij}), \ \forall i,j$.

Matriz traspuesta, simétrica y diagonal

Dada la matriz $A=(a_{ij})$ de orden $m\times n$, se llama **traspuesta** de A y la representamos por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas.

Es decir: la primera fila de A es la primera columna de A^t, la segunda fila de A es la primera columna de A^t, etc.

Ejemplo

Si $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

Si $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que coincide con su traspuesta. Es decir, A es simétrica <==> $A=A^t$.

Es obvio que solo las matrices cuadradas pueden ser simétricas. Las matrices rectangulares, al no coincidir el número de filas con el número de columnas, nunca serán simétricas.

Ejemplo

La matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ es simétrica, ya que $A=A^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

La matriz $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 6\\ 1 & -1 & 5\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$ es simétrica, ya que $B=B^t=\begin{pmatrix}4 & 1 & 6\\ 1 & -1 & 5\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

La matriz $D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 3\\ 7 & 7 & -10\end{pmatrix}$ no es simétrica, ya que. $D\neq D^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ -1 & -1 & 7\\ 5 & 3 & -10\end{pmatrix}$ → Es un ejemplo de matriz cuadrada no simétrica.

La matriz $C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ no es simétrica, ya que $C\neq C^t=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ → Las matrices rectangulares nunca son simétricas.

La matriz traspuesta cumple las siguientes propiedades:

- $\forall A \in M_{m \times n}$ $(A^t)^t = A$ → La traspuesta de la traspuesta coincide con la matriz de partida.
- $\forall A, B \in M_{m \times n}$ $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ → La traspuesta del producto de matrices es la traspuesta de la segunda matriz por la traspuesta de la primera.
- $\forall A, B \in M_{m \times n}$ $(A + B)^t = A^t + B^t$ → La traspuesta de la suma de matrices es la traspuesta de la primera matriz más la traspuesta de la segunda.
- $\forall A, B \in M_{m \times n}$ $(A - B)^t = A^t - B^t$ → La traspuesta de la diferencia de matrices es la traspuesta de la primera matriz menos la traspuesta de la segunda.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in M_{m \times n}$ $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$ → La traspuesta de un escalar por una matriz es el escalar por la matriz traspuesta.

Además de estas propiedades de las matrices traspuestas, indicamos ciertas propiedades de simetría útiles en la resolución de problemas con matrices:

- La matriz $B = A + A^t$ es una matriz simétrica.
- Si $A = -A^t$ se dice que A es **antisimétrica**.
- La matriz $C = A - A^t$ es antisimétrica, ya que cumple $C = -C^t$.
- Una matriz A siempre se puede descomponer en suma de una matriz simétrica $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y una matriz antisimétrica $H = \frac{1}{2}(A - A^t)$ de la forma $A = S + H$.

Ya sabemos que la **diagonal principal** de una matriz está formada por los elementos a_{ij} con $i = j$ → { a_{11} , a_{22} , a_{33} ,..., a_{mm} }. Para matrices cuadradas de orden $n = 3$ la diagonal principal la forman los elementos { a_{11} , a_{22} , a_{33} }.

Los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$ forman la **diagonal secundaria**. Para matrices cuadradas de orden $n = 3$ la diagonal secundaria la forman los elementos { a_{13} , a_{22} , a_{31} }.

Una matriz cuadrada es **triangular** cuando todos los términos por encima o por debajo de la diagonal principal son cero.

Si todos los elementos que no están en la diagonal principal son cero, hablamos de matriz **diagonal**.

En una matriz diagonal con todos los los elementos de la diagonal principal iguales, se dice **matriz escalar**. Un caso particular de matriz escalar es aquella que tiene $a_{ij}=1$ con $i=j$, y que recibe el nombre de **matriz unidad**.

Ejemplo

Matriz diagonal $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Matriz escalar $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matriz unidad $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Suma de matrices y producto de escalar por matriz

En el conjunto de matrices $M_{m\times n}$ se puede definir la suma de matrices. Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de orden $m\times n$, su suma resulta:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la suma $A+B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices. Obviamente, la suma de matrices solo se define si ambas matrices son del mismo orden $m\times n$.

El producto de un escalar $\lambda\in\mathbb{R}$ por una matriz $A=(a_{ij})$ de orden $m\times n$ se define:

$$\lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & \lambda a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz $\lambda\cdot A$ se obtiene multiplicando por λ cada elemento de la matriz A .

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad 3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices de orden $m\times n$:

- Conmutativa. $A+B=B+A$, $\forall A, B\in M_{m\times n}$
- Asociativa. $(A+B)+C=A+(B+C)$, $\forall A, B, C\in M_{m\times n}$.
- Elemento neutro. La matriz cero de orden $m\times n$, con todos los términos $a_{ij}=0$, es el elemento neutro ya que cumple $A+0=A$.
- Elemento simétrico. Es la matriz $A=(a_{ij})$ cambiada de signo es todos sus términos o elementos: $A+(-A)=0$, donde $-A=(-a_{ij})$. El elemento simétrico de la suma también se llama elemento opuesto. Por definición, una matriz más su elemento simétrico da lugar al elemento neutro de la suma de matrices.

El producto de **un escalar por una matriz tiene las siguientes propiedades** $\forall \lambda, \mu\in\mathbb{R}$, $\forall A\in M_{m\times n}$:

- $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$
- $(\lambda\cdot\mu)A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$
- $1\cdot A=A$

El conjunto de matrices $M_{m\times n}$ con las propiedades aquí definidas, tiene estructura matemática de espacio vectorial (la misma estructura que el año pasado estudiamos para vectores en el conjunto V^n http://danipartal.net/pdf/1bachTema5Teoria01.pdf).

Producto de matrices

Dadas dos matrices A y B diremos que son multiplicables en el orden $A\cdot B$, si el número de columnas de A es igual al número de filas de B .

Si se verifica que $A=(a_{ij})$ es de orden $m\times n$ y $B=(b_{jk})$ de orden $n\times p$, la matriz producto $C=A\cdot B$ es de orden $m\times p$, donde $C=(c_{ik})$ tiene por elementos:

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{¿}\cdot b_{nk} \quad \rightarrow \quad c_{ik}=\sum_{f=1}^{n} a_{if}\cdot b_{fk}$$

Es decir, **el elemento c_{ik} de la matriz producto viene dado por el producto de la fila i de la matriz A por la columna k de la matriz B** .

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 2 & -1\cdot(-3)+2\cdot 1+3\cdot 5 \\ 4\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2 & 4\cdot(-3)+1\cdot 1+2\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$$

Una consecuencia de esta definición del producto de matrices es la siguiente: **el producto de dos matrices puede ser cero sin que ninguna de ellas sea la matriz cero**.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además, por lo general, **el producto de dos matrices no es conmutativo**: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Esta consecuencia es muy importante, ya que estamos acostumbrados a trabajar con números reales donde el producto sí es conmutativo... pero en matrices no es así, y es muy común “dejarnos llevar” e intercambiar erróneamente el orden de las matrices que aparecen en un producto.

Si una matriz A deseamos multiplicarla por una matriz B , deberemos indicar siempre en que orden aplicamos la multiplicación, ya que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Ejemplo

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 3\\ -2 & 2 & 19\\ 2 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 5 & 12\end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

El **producto de matrices sí es asociativo**: $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

El **producto de matrices es distributivo respecto de la suma**: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

El **elemento neutro del producto de matrices cuadradas de orden** n **es la matriz unidad** I **de orden** n , que satisface la siguiente relación $I\cdot A=A\cdot I=A$. Es decir, al aplicar I tanto por la izquierda como por la derecha sobre la matriz arbitraria A , sigo obteniendo A .

Si repasamos las propiedades del producto de matrices, y lo comparamos cuando hemos estudiado el producto de números reales o el producto de números complejos, podemos echar en falta una propiedad: el elemento simétrico del producto, que tanto en los números reales como en los números complejos es el elemento inverso.

Es decir, ¿podemos encontrar una matriz B que al ser aplicada sobre la matriz A nos dé como resultado la matriz unidad I , que es el elemento neutro del producto de matrices? ==> ¿ $A\cdot B=B\cdot A=I$?

Pues... a veces sí y a veces no.... Y de existir, solo es aplicable a matrices cuadradas. Si existe esa matriz B se llama inversa de A y se representa por $B=A^{-1}$. Y se dice que la matriz A es **regular o inversible (es decir, que admite matriz inversa)**. Si no admite matriz inversa, se dice que es **singular**.

Repetimos: solo si la matriz A es cuadrada puede admitir matriz inversa.

Método directo para obtener matriz inversa

La definición de matriz inversa en matrices cuadradas de orden n nos dice que, si existe, la matriz A^{-1} satisface la siguiente igualdad:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

Donde I es la matriz identidad de orden n .

Para obtener A^{-1} planteamos el sistema resultante de la ecuación $A\cdot A^{-1}=I$, donde los coeficientes de A^{-1} son incógnitas. Y si el resultado es un sistema incompatible, implica que no existe matriz inversa.

Ejemplo

¿Existe la inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$?

Suponemos que $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ y planteamos la igualdad $A\cdot A^{-1}=I$.

$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ → Igualamos a I → $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Multiplicamos las dos matrices del lado izquierdo de la igualdad.

$$\begin{pmatrix}2x-z & 2y-t\\ 0+3z & 0+3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2x-z & 2y-t\\ 3z & 3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Igualamos término a término hasta formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix}2x-z=1\\ 2y-t=0\\ 3z=0\\ 3t=1\end{matrix}\right\}\rightarrow\text{Resolvemos}\rightarrow\quad t=\frac{1}{3}\ ,\ z=0\ ,\ y=\frac{1}{6}\ ,\ x=\frac{1}{2}$$

Es decir, la matriz inversa resulta $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. Y se cumple:

$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Ejemplo

¿Existe la inversa de $B=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$?

Suponemos que $B^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ y planteamos la igualdad $B\cdot B^{-1}=I$.

$B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ → Igualamos a I → $\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Multiplicamos las dos matrices del lado izquierdo de la igualdad.

$$\begin{pmatrix}-6x-3z & -6y-3t\\ 4x+2z & 4y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Igualamos término a término hasta formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$\begin{cases}-6x-3z=1\\ -6y-3t=0\\ 4x+2z=0\\ 4y+2t=1\end{cases}$ → Resolvemos por Gauss → $\left(\begin{array}{cccc|c}-6 & 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0\\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)$ →

$F'_3=6\cdot F_3+4\cdot F_1$, $F'_4=6\cdot F_4+4\cdot F_2$ → $\left(\begin{array}{cccc|c}-6 & 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)$ → Encontramos incongruencias en las filas F_3 y F_4 → Sistema incompatible → No existe solución → La matriz B no admite inversa.

Método de Gauss-Jordan para obtener matriz inversa

Este segundo método para obtener la matriz inversa parte del conjunto $(A|I)$ y aplica transformaciones hasta obtener un nuevo conjunto $(I|B)$, donde $B=A^{-1}$ en caso de existir la matriz inversa.

Si al realizar el proceso de transformación alguna de las filas de A se anula, llegaríamos a una incongruencia, y significaría que A no admite inversa.

Ejemplo

¿Existe la inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$? Planteamos el conjunto $(A|I)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$ → Aplicamos transformaciones para obtener el nuevo conjunto $(I|B)$

→ $F'_1=2\cdot F_1+F_2$ → $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$ → Y obtenemos una incongruencia en la F_1 al tener todos los términos nulos en la matriz de partida A → No es posible obtener la matriz inversa.

Ejemplo

¿Existe la inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$? Planteamos el conjunto $(A|I)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ → Aplicamos transformaciones para obtener el nuevo conjunto $(I|B)$

→ $F'_1=F_1+3\cdot F_2$ → $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ → $F'_2=5\cdot F_2-F_1$ → $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$ →

$F'_1=\frac{1}{5}F_1$, $F'_2=\frac{1}{5}F_2$ → $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$ → Matriz inversa $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Que satisface las igualdades:

$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$