Problemas – Tema 7

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 12 - Todos resueltos

Hoja 12. Problema 1

1. a) Una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Comprobar si es ortogonal la matriz A **.**

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

b) Obtener A^3

a) Una matriz es ortogonal cuando la inversa coincide con su traspuesta.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow A^t=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz inversa por el método directo:

$$A\cdot A^{-1}=I \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{c}{2} & \frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{d}{2} \\ \frac{a}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2} & \frac{b}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando componentes llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, que debemos resolver.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}+\dfrac{c}{2}=1\\ \dfrac{b\sqrt{3}}{2}-\dfrac{d}{2}=0\\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{c\sqrt{3}}{2}=0\\ \dfrac{b}{2}+\dfrac{d\sqrt{3}}{2}=1\end{array}\right\} \rightarrow \quad c=\frac{-1}{2} \quad , \quad a=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad d=\frac{1}{2} \quad , \quad b=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Y se cumple que $A^{-1}=A^{t}$ → La matriz es ortogonal.

b) $A^3=A^2\cdot A$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Hoja 12. Problema 2

2. a) Para qué valores de a no admite inversa la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Calcular las matrices A y B que satisfacen el siguiente sistema matricial:

$$5A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Obtenemos la matriz triangular por Gauss para saber cuántos vectores linealmente independientes hay, como máximo, en la matriz. Si hay 3 vectores linealmente independientes, el rango será 3 y la matriz tendrá inversa.

$\begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$ → Reordeno y coloco F_3 como primera fila → $\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ →

→ $F'_3=(a-3)F_3-F_2$ → $\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & -2a+2 \end{pmatrix}$ → Discusión de casos:

Si $-2a+2=0$ → $a=1$ → $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Rango = 2

El caso $a-3=0$ no lo contemplo porque anula las transformaciones realizadas por Gauss, donde aplicamos $F'_3=(a-3)F_3-F_2$ en uno de los pasos.

Si $a=0$ → $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ → $F'_2=F_2-3F_1+F_3$ → $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ →

→ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ → Su rango es 2

Conclusión: Si $a=1$ ó $a=0$ la matriz no admite inversa.

b)

$5A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ → multiplicar por 2 → $10A+6B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}$

$3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ → multiplicar por 3 → $9A+6B=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}$

Restamos ambas ecuaciones matriciales para obtener A .

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos la matriz B .

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}-\frac{3}{2}A \rightarrow B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hoja 12. Problema 3

3. Calcula:

a) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}dx$

b) $\int arcocos(x)dx$

a) $I=\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}dx=3\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx-\int_1^2 \frac{1}{x}dx+\int_1^2 x\,dx=\frac{-3}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2-[\ln|x|]_1^2+\frac{1}{2}[x^2]_1^2$

$I=\frac{-3}{2}(\frac{1}{4}-1)-(\ln(2)-\ln(1))+\frac{1}{2}[4-1]=\frac{9}{8}-\ln(2)+\frac{3}{2}=\frac{21}{8}-\ln(2)$

b) $I=\int arcocos(x)dx$

Aplicamos método por partes:

$u=arcocos(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$dv=dx \quad \rightarrow \quad v=x$

Sustituyendo $I=u\cdot v-\int v\,du$

$$I=x\cdot arcocos(x)+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\cdot arcocos(x)-\frac{2}{2}\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=x\cdot arcocos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$$

Hoja 12. Problema 4

4. Calcula:

a) El área encerrada por la función $f(x)=-x^2-3$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$ y $x=4$.

b) $\int (2\cos^2(x)+1)\,dx$

a) En el intervalo $[0,4]$ la función $f(x)=-x^2-3$ es $f(x)\leq 0$. Por lo tanto el área que nos solicitan coincide con el valor absoluto de la siguiente integral definida:

$$A=\left|\int_0^4 (-x^2-3)\,dx\right|=\left|\left[\frac{-x^3}{3}-3x\right]_0^4\right|=\left|\frac{-64}{3}-12-0\right|=\frac{100}{3}\ u^2$$

b) $I=\int (2\cos^2(x)+1)\,dx$

Recordamos la relación fundamental de trigonometría y la fórmula del coseno del ángul doble.

$$\cos^2(x)+sen^2(x)=1$$

$$\cos^2(x)-sen^2(x)=\cos(2x)$$

Si sumamos amas expresiones:

$$2\cos^2(x)=1+\cos(2x)$$

Llevando este resultado a la integral:

$$I=\int (1+\cos(2x)+1)\,dx=\int (\cos(2x)+2)\,dx=\int \cos(2x)\,dx+2\int dx$$

$$I=\frac{1}{2}sen(2x)+2x+C=sen(x)\cos(x)+2x+C$$