# Problemas – Tema 7

# Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 02 - Problemas 1, 2

## Hoja 2. Problema 1

## Resuelto por María Olivares (abril 2015)

**1. Hallar todas las matrices que conmutan con:**

**a)** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

**b)** $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

**c)** $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Para hallar una matriz que conmute con A se tiene que cumplir que:

A·X=X·A

Es decir:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & x+y\\ z & z+t\end{pmatrix}$$

Igualamos cada término de la matriz A con su correspondiente en la matriz X.

$$\begin{pmatrix}x+z=x\\ y+t=x+y\\ z=z\\ t=z+t\end{pmatrix}\rightarrow\quad z=0\quad,\quad x=t\quad,\quad y=\ parámetro\ \ libre\ \rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x\end{pmatrix}$$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

Para hallar una matriz que conmute con B se tiene que cumplir que: B·X=X·B

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-2z & y-2t\\ -3x-4z & -3y+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3y & -2x+4y\\ z-3t & -2z+4t\end{pmatrix}$$

Igualando término a término, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$x-2z=x-3y \;\rightarrow\; 2z=3y$

$y-2t=-2x+4y$

$-3x+4z=z-3t$

$-3y+4\text{t}=-2z+4\text{t} \;\rightarrow\; -3y=-2z$

Tomando como parámetros libre las incógnitas $z,t$ .

$x=z+t \quad , \quad y=\dfrac{2}{3}z$

$$X=\begin{pmatrix}z+t & \dfrac{2}{3}z\\ z & t\end{pmatrix}$$

c) $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Para hallar una matriz que conmute con C se tiene que cumplir que: C · X = X · C

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-x-z & -y-t\\ 2x+3z & 2y+3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y & -x+3y\\ -z+2t & -z+3t\end{pmatrix}$$

Igualando tenemos un sistema cuatro por cuatro:

$-x-z=-x+2y \rightarrow -z=2\mathrm{y}$

$-y-t=-x+3y \rightarrow -t=-x+4y$

$2x+3z=-z+2t \rightarrow 2x=-4\mathrm{z}+2t \rightarrow x=-2\mathrm{z}+t$

$2y+3t=-z+3t \rightarrow -z=2\mathrm{y}$

Tomamos $y$ como parámetro libre:

$z=-2\mathrm{y}$

$t=x-4y \rightarrow x=4\mathrm{y}+t$

$x=-2\mathrm{z}+t \rightarrow x=4\mathrm{y}+t$

Tomamos $t$ como parámetro libre: $X=\begin{pmatrix} 4\mathrm{y}+t & y \\ -2\mathrm{y} & t \end{pmatrix}$

# Hoja 2. Problema 2

# Resuelto por Sara Aparicio (marzo 2015)

**2. Sean las matrices** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ **. Hallar** $a, b$ $y$ $c$ **para que conmuten.**

Dos matrices conmutan si y solo si se cumple:

$A \cdot B = B \cdot A$

Aplicado a nuestro problema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+c \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 1+c & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas:

$a+1=a+b$

$b+c=a$

$a=1+c$

$b=1$

Por lo tanto, $b=1$ y $a=1+c$ , quedando $c$ como parámetro libre.

Es decir:

$$B=\begin{pmatrix} c+1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$