Problemas – Tema 7

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 04 - Problemas 2, 3, 4 y 5

Hoja 4. Problema 2

Resuelto por Andrea Cañigueral (marzo 2015)

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ **hallar** $B=A+A^2+A^3+...+A^n$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0&0\\0&3^2&0\\0&0&4^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&27&0\\0&0&64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0&0\\0&3^3&0\\0&0&4^3\end{pmatrix}$$

Podemos inferir que la potencia n-ésima será:

$$A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}$$

Demostrémoslo por inducción matemática.

Comprobamos para n = 1 → $A^1=\begin{pmatrix}2^1&0&0\\0&3^1&0\\0&0&4^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}=A$

Suponemos cierto el término n-ésimo → $A^n=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n\end{pmatrix}$

Demostramos el término $A^{n+1}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 0 & 0\\ 0 & 3^{n+1} & 0\\ 0 & 0 & 4^{n+1}\end{pmatrix}$ a partir de A^n y de A. Es decir:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 0 & 0\\ 0 & 3^{n+1} & 0\\ 0 & 0 & 4^{n+1}\end{pmatrix}$$ → Como queríamos demostrar.

Por lo tanto la matriz suma de los n primeros términos será:

$$B=A+A^2+A^3+...+A^n=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^2 & 0 & 0\\ 0 & 3^2 & 0\\ 0 & 0 & 4^2\end{pmatrix}+...+\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2+2^2+2^3+..+2^n & 0 & 0\\ 0 & 3+3^2+3^3+..+3^n & 0\\ 0 & 0 & 4+4^2+4^3+...+4^n\end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos suma de términos que se diferencian, de forma consecutiva, en el producto por una razón r. Estamos ante la suma de los términos de una progresión geométrica de razón r.
Por ejemplo, en la primera fila, tenemos el número 2 más $2\cdot 2$ más $2\cdot 2\cdot 2$ más … así hasta el término n-ésimo¿Cómo obtener el resultado final de esta suma?
Podemos acordarnos de la fórmula que suma los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r:

$$S_n=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1}=\frac{2^n\cdot 2-2}{2-1}=2\cdot(2^n-1)$$

O bien obtener este valor con el siguiente razonamiento:

$$S_n=2+2^2+2^3+...+2^n$$

$$-2\cdot S_n=-2^2-2^3-2^4-...-2^{n+1}$$

Sumando ambas expresiones:

$$S_n-2S_n=2-2^{n+1}\quad\to\quad -S_n=2-2^{n+1}\quad\to\quad S_n=2^{n+1}-2\quad\to\quad S_n=2(2^n-1)$$

Llegando al mismo resultado obtenido en la fórmula anterior.

Si aplicamos este razonamiento para el resto de filas de la matriz B :

$$S_n=3+3^2+3^3+...+3^n$$

$$-3\cdot S_n=-3^2-3^3-3^4-...-3^{n+1}$$

Sumando:

$$S_n-3\,S_n=3-3^{n+1} \quad\rightarrow\quad -2\,S_n=3-3^{n+1} \quad\rightarrow\quad S_n=\frac{3^{n+1}-3}{2} \quad\rightarrow\quad S_n=\frac{2(2^n-1)}{2}$$

Y análogamente para la fila tercera:

$$S_n=4+4^2+4^3+...+4^n$$

$$-4\cdot S_n=-4^2-4^3-4^4-...-4^{n+1}$$

Sumando:

$$S_n-4\,S_n=4-4^{n+1} \quad\rightarrow\quad -3\,S_n=4-4^{n+1} \quad\rightarrow\quad S_n=\frac{4^{n+1}-4}{3} \quad\rightarrow\quad S_n=\frac{4(4n-1)}{3}$$

Y la matriz B queda:

$$B=\begin{pmatrix} 2(2n-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3(3n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(4n-1)}{3} \end{pmatrix}$$

Hoja 4. Problema 3

Resuelto por Mónica Jiménez (abril 2015)

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **hallar** A^n

En primer lugar, vamos a intuir una regla general para la matriz n-ésima:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 64 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 64 & 16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 160 & 32 \end{pmatrix}$$

Inducimos por tanto que: $A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

Lo demostramos por inducción matemática:

- Se cumple para n=1

$$A^1=A=\begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 1\cdot 2^1 & 2^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Supongo cierto el término n-ésimo.
- Hallo A^{n+1} a partir de A^n y A .

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2^n & 0 \\ 2\cdot n\cdot 2^n+2\cdot 2^n & 2\cdot 2^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1)\cdot 2^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Así queda demostrado que:

$$A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n\cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Hoja 4. Problema 4

Resuelto por José Carlos Rodríguez (marzo 2015)

4. Resolver

a) $\int x\cdot\cos(x)dx$

b) $\int x^3\cdot e^x dx$

c) $\int arcotg(x)dx$

a) $I=\int x\cdot\cos(x)dx$

Aplicamos partes.

$$u=x \quad\rightarrow\quad du=dx$$

$$dv=\cos(x)dx \quad\rightarrow\quad v=sen(x)$$

$$I=x\cdot sen(x)-\int sen(x)dx=x\cdot sen(x)+\cos(x)+C$$

b) $\int x^3\cdot e^x dx$

Aplicamos partes.

$$u=x^3 \quad\rightarrow\quad du=3x^2 dx$$

$$dv=e^x dx \quad\rightarrow\quad v=e^x$$

$$I=x^3\cdot e^x-3\cdot\int x^2\cdot e^x dx$$

Nuevamente aplicamos partes.

$$u=x^2 \quad\rightarrow\quad du=2x\,dx$$

$$dv=e^x dx \quad\rightarrow\quad v=e^x$$

$$I=x^3\cdot e^x-3x^2\cdot e^x+6\cdot\int x\cdot e^x dx$$

Y partes para terminar.

$$u=x \quad\rightarrow\quad du=dx$$

$dv = e^x dx \quad \rightarrow \quad v = e^x$

$I = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot \int e^x dx$

$I = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot e^x + C$

$I = e^x (x^3 - 3x^2 + 6 \cdot x - 6) + C$

c) $\int arcotg(x) dx$

Aplicamos partes.

$u = arcotg(x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx$

$dv = dx \quad \rightarrow \quad v = x$

$I = x \cdot arcotg(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot arcotg(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot x}{1+x^2} dx$

$I = x \cdot arcotg(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

Hoja 4. Problema 5

Resuelto por Nicolás Carrillo (marzo 2015)

5. Resolver

a) $\int e^{3x} \cdot sen(x)\,dx$

b) $\int e^{2x} \cdot (x^3 + 5x^2 - 2)\,dx$

c) $\int \ln(x)\,dx$

a) $\int e^{3x} \sin x\, dx$

Resolvemos esta integral por el método de integración por partes.

$$u = e^{3x} \rightarrow\rightarrow\rightarrow du = 3e^{3x}\,dx$$

$$dv = \sin x\,dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = -\cos x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Sustituimos:

$$I = \int e^{3x} \sin x\,dx = -e^{3x} \cos x + \int \cos x\, 3e^{3x}\,dx$$

$$\int \cos x\, 3e^{3x}\,dx = I'$$

Esta segunda integral también la hacemos por partes:

$$u = 3e^{3x} \rightarrow\rightarrow\rightarrow du = 9e^{3x}\,dx$$

$$dv = \cos x\,dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = \sin x$$

$$I' = 3e^{3x} \sin x - \int \sin x\, 9e^{3x}\,dx = 3e^{3x} \sin x - 9\int \sin x\, e^{3x}\,dx$$

Sustituimos su solución en la integral I .

$$I = \int e^{3x} \sin x\,dx = -e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \sin x - 9\int \sin x\, e^{3x}\,dx$$

Y nos damos cuenta que en el término de la derecha recuperamos la integral de partida. Por lo que pasamos esa integral sumando al otro miembro:

$$10\int e^{3x}\sin x\, dx = e^{3x}(-\cos x + 3\sin x) + C$$

Despejamos:

$$\int e^{3x}\sin x\, dx = \frac{1}{10}e^{3x}(-\cos x + 3\sin x) + C$$

b) $\int e^{2x}(x^3+5x^2-2)\,dx$

También aplicamos partes:

$$u = x^3+5x^2-2 \to\to\to du = 3x^2+10x\, dx$$

$$dv = e^{2x}\,dx \to\to\to v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Sustituimos:

$$\int e^{2x}(x^3+5x^2-2)\,dx = (x^3+5x^2-2)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}(3x^2+10x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{2}e^{2x}(3x^2+10x)\,dx = I'$$

Volvemos a aplicar partes:

$$u = 3x^2+10x \to\to\to du = 6x+10\,dx$$

$$dv = \frac{1}{2}e^{2x}\,dx \to\to\to v = \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$I' = (3x^2+10x)\frac{1}{4}e^{2x} - \int \frac{1}{4}e^{2x}(6x+10)\,dx$$

Donde obtenemos una nueva integral que necesita partes en su resolución:

$$\int \frac{1}{4}e^{2x}(6x+10)\,dx = I''$$

$$u = 6x+10 \to\to\to du = 6\,dx$$

$$dv=\frac{1}{4}e^{2x}dx\rightarrow\rightarrow\rightarrow v=\frac{1}{8}e^{2x}$$

$$I''=(6x+10)\frac{1}{8}e^{2x}-\int\frac{1}{8}e^{2x}6\,dx=(6x+10)\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{6}{16}e^{2x}+C$$

Unificando todos los resultados en la integral I de partida:

$$I=(x^3+5x^2-2)\frac{1}{2}e^{2x}-\left[(3x^2+10x)\frac{1}{4}e^{2x}-\left((6x+10)\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{6}{16}e^{2x}\right)\right]+C$$

$$I=(x^3+5x^2-2)\frac{1}{2}e^{2x}-(3x^2+10x)\frac{1}{4}e^{2x}+(6x+10)\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{6}{16}e^{2x}+C$$

$$I=e^{2x}\left[\frac{x^3+5x^2-2}{2}-\frac{(3x^2+10x)}{4}+\frac{(6x+10)}{8}-\frac{6}{16}\right]+C$$

$$I=\frac{1}{8}e^{2x}(4x^3+14x^2-14x-1)+C$$

c) $\int\ln x\,dx$

Integramos por partes:

$$u=\ln x\rightarrow\rightarrow\rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=dx\rightarrow\rightarrow\rightarrow v=x$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

Por lo tanto:

$$\int\ln x\,dx=\ln x.x-\int x\frac{1}{x}dx=\ln x.x-\int dx=\ln x.x-x+C$$
$$\int\ln x\,dx=\ln x.x-x+C$$