Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 15

Modelo 15. Opción A. Ejercicio 1

Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+a x^2+b x+c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$.

Necesitamos calcular tres parámetros, por lo que debemos buscar tres condiciones.

La primera: la función tiene derivada nula en $x=1 \rightarrow f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow 3+2a+b=0$

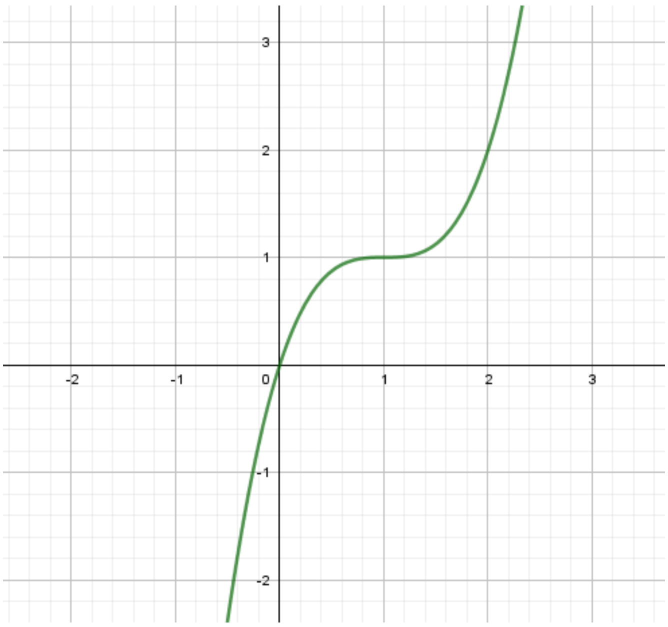
La segunda: si en $x=1$ no hay extremo relativo, significa que la segunda derivada en ese punto no es ni positiva (mínimo) ni negativa (máximo). Por lo tanto, la segunda derivada es nula (condición necesaria de punto de inflexión) → $f''(1)=0 \rightarrow f''(x)=6x+2a \rightarrow 6+2a=0 \rightarrow a=-3$

La tercera: si la función pasa por el punto $(1,1) \rightarrow f(1)=1 \rightarrow 1+a+b+c=1 \rightarrow b+c=3$

Si $a=-3$ de la primera condición podemos deducir → $3-6+b=0 \rightarrow b=3$

Y si $b=3$ de la tercera condición resulta → $3+c=3 \rightarrow c=0$

La función solución resulta $f(x)=x^3-3x^2+3x$



Modelo 15. Opción A. Ejercicio 2

Considera las funciones $f(x)$ y $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=|x^2-2x|$.
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

a) La gráfica de $f(x)=6x-x^2$ es una parábola con máximo absoluto, donde el vértice aparece en $f'(x)=0$. Por lo tanto:

$6-2x=0 \;\rightarrow\; x=3$, $f(3)=9$ → Vértice en $(3,9)$

Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje horizontal implican $f(x)=0$. Es decir:

$x=0$, $x=6$

En el estudio de $g(x)=|x^2-2x|$ primero rompemos el valor absoluto a trozos.

Para ello, sacamos raíces del argumento del valor absoluto y determinamos su signo en cada uno de los intervalos formados por estas raíces.

$$x^2-2x=0 \;\rightarrow\; x=0 \;,\; x=2 \;\rightarrow\; g(x)=\left\{\begin{matrix} x^2-2x \;\; si \;\; x\leq 0 \\ -x^2+2x \;\; si \;\; 0<x<2 \\ x^2-2x \;\; si \;\; 2\leq x \end{matrix}\right\}$$

Podemos dibujar la gráfica de la parábola x^2-2x y poner positivo lo que es negativo.

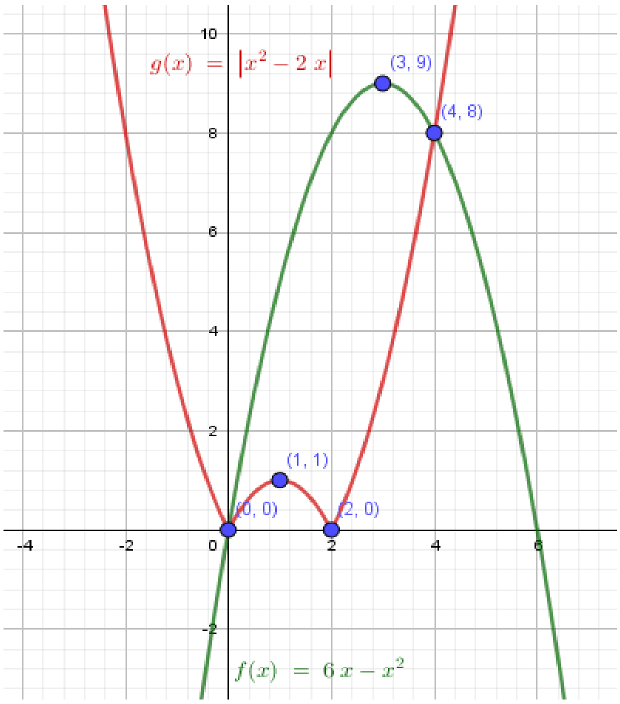
El vértice lo tendremos dentro del intervalo $0<x<2 \;\rightarrow\; g'(x)=0 \;\rightarrow\; -2x+2=0 \;\rightarrow\; x=1$, $g(1)=1$ → Vértice en $(1,1)$.

Los puntos de cortes de ambas funciones implica igualar sus ecuaciones, resolviendo para cada intervalo en que se ha roto la función a trozos.

Si $x\leq 0$ ó $2\leq x \;\rightarrow\; f(x)=g(x) \;\rightarrow\; 6x-x^2=x^2-2x \;\rightarrow\; 8x-2x^2=0 \;\rightarrow\; x=0$, $x=4$ → Los puntos de cortes aparecen en $(0,0)$ y $(4,8)$.

Si $0<x<2 \;\rightarrow\; f(x)=g(x) \;\rightarrow\; 6x-x^2=-x^2+2x \;\rightarrow\; x=0$ que no pertenece al intervalo $0<x<2$

Con los vértices, los puntos de corte con los ejes y los puntos de corte entre las gráficas ya tenemos todo lo necesario para dibujar el recinto limitado.



b) La función $f(x)$ siempre permanece por encima de la de la función $g(x)$ en el recinto cerrado por ambas curvas entre $x=0$ y $x=4$, por lo que el área es:

$$\acute{A}rea=\int_0^4 (f(x)-g(x))\,dx$$

Como la función $g(x)$ está definida a trozos, habrá que usar la ecuación adecuada a cada intervalo:

$$\acute{A}rea=\int_0^2 (6x-x^2-(-x^2+2x))\,dx+\int_2^4 (6x-x^2-(x^2-2x))\,dx$$

$$\acute{A}rea=\int_0^2 4x\,dx+\int_2^4 (8x-2x^2)\,dx=2[x^2]_0^2+4[x^2]_2^4-\frac{2}{3}[x^3]_2^4$$

Aplicamos la Regla de Barrow, recordando la relación entre la primitiva $F(x)$ de una función $f(x)$ a integrar en un intervalo:

$$F(x)=\int f(x)\,dx \quad \rightarrow \quad F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\acute{A}rea=2[4-0]+4[16-4]-\frac{2}{3}[64-8]=8+48-\frac{112}{3}=\frac{168-112}{3}=\frac{56}{3}\,u^2$$

Modelo 15. Opción A. Ejercicio 3

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Discute según los valores del parámetro m **.**

b) Resuelve el sistema para $m=-2$ **.**

a) Pasamos el sistema a notación matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{array}\right)$$ → Resolvemos por Gauss → $F'_2=F_2-F_1$, $F'_3=F_3-2F_2$ →

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 2 & 3m+1 & 8-6m \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3+2F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 0 & -1 & -m-2 & 3m-3 \\ 0 & 0 & m-3 & 2 \end{array}\right)$$

Igualamos los coeficientes de la diagonal principal que dependen del parámetro: $m-3=0 \rightarrow m=3$

Realizamos una discusión de casos, en función el parámetro, para determinar el tipo de solución.

- Si $m=3$ → El sistema, tras aplicar Gauss, queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ → En la tercera ecuación aparece el absurdo matemático $0=2$ – No hay solución → Sistema Incompatible.
- Si $m\neq 3$ → Tras aplicar Gauss obtenemos tres ecuaciones de coeficientes no nulos y tres incógnitas, por lo que podemos despejar de manera única cada incógnita → Sistema Compatible determinado

b) Para $m=-2$ estamos, según la discusión del apartado anterior, en solución única. El sistema, tras aplicar Gauss, queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$ → De cada fila podemos resolver una incógnita.

Tercera fila → $-5z=2 \rightarrow z=\frac{-2}{5}$

Segunda fila → $-y=-9 \rightarrow y=9$

Primera fila → $x+2y+z=3 \rightarrow x+18-\frac{2}{5}=3 \rightarrow x=\frac{-73}{5}$

Modelo 15. Opción A. Ejercicio 4

Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta dada por $r: x-5=y=\frac{z+2}{-2}$.

a) Determina el punto simétrico de P respecto de r .

b) Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

a) Buscamos un punto $P'(x',y',z')$ simétrico de $P(1,0,-1)$ respecto la recta.

Un vector director de la recta es $\vec{u}_r=(1,1,-2)$. Tomamos un punto arbitrario de la recta, cuyas coordenadas coincide con las componentes paramétricas de la recta.

$A(5+t,t,-2-2t)$

Trazamos el vector $\vec{PA}=(4+t,t,-1-2t)$ y exigimos que sea perpendicular a la recta. ¿Cómo? Imponiendo que el producto escalar de $\vec{u}_r$ y $\vec{PA}$ sea nulo.

$$\vec{u}_r\cdot\vec{PA}=0 \quad\rightarrow\quad 4+t+t+2+4t=0 \quad\rightarrow\quad t=-1$$

Con el valor del parámetro podemos obtener el punto A de la recta que será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Recordamos que el punto medio se obtiene como la semisuma de las componentes de los extremos del segmento.

Si $t=-1 \rightarrow A(6,1,-4) \rightarrow (6,1,-4)=(\frac{1+x'}{2},\frac{0+y'}{2},\frac{-1+z'}{2})$

Si dos puntos son iguales, sus coordenadas son iguales. Por lo tanto:

$$x'=11 \quad , \quad y'=2 \quad , \quad z'=-7$$

El punto solución es $P'(11,2,-7)$.

b) Buscamos un punto de la recta que equidiste de P y Q . Nuevamente tomamos el concepto de punto arbitrario de la recta.

$A(5+t,t,-2-2t)$

Y exigimos que la distancia de P a A sea igual a la distancia de Q a A .

$$\vec{PA}=(4+t,t,-1-2t) \rightarrow d(P,A)=|\vec{PA}|=\sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2}$$

$$\vec{QA}=(3+t,t-1,-3-2t) \rightarrow d(Q,A)=|\vec{QA}|=\sqrt{(3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2}$$

$$16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t=9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t$$

$$17+12t=19+18t \rightarrow -2=6t \rightarrow t=\frac{-1}{3}$$

Y con el parámetro obtenemos el punto solución $\rightarrow$ $A(\frac{14}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$

Modelo 15. Opción B. Ejercicio 1

Determina $k\neq 0$ **sabiendo que la función** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\begin{Bmatrix} 3-kx^2 & si & x\leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si & x>1 \end{Bmatrix}$ **es derivable.**

Una función es derivable en un punto si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Continuidad de la función en el punto.
- Igualdad de las derivadas laterales en el punto.

Para que una función sea continua en un punto, a su vez, se cumplen tres condiciones:

1. $\exists f(1)=3-k$
2. $L^-=\lim_{x\to 1^-}(3-kx^2)=3-k$

   $L^+=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{2}{k}x=\dfrac{2}{k}$

Igualdad de límites laterales → $L^-=L^+=L \;\to\; 3-k=\dfrac{2}{k} \;\to\; -k^2+3k-2=0 \;\to\; k=1, k=2$

3. $f(1)=L$ → Llegamos a la misma condición $-k^2+3k-2=0$

Derivamos la función en cada tramo, sin incluir el signo igual en el punto frontera ya que eso es lo que queremos demostrar.

$$f'(x)=\begin{Bmatrix} -2kx & si & x<1 \\ \dfrac{-2}{kx^2} & si & x>1 \end{Bmatrix}$$

E igualamos las derivadas laterales.

$$f'(1^-)=-2k \quad , \quad f'(1^+)=\frac{-2}{k} \;\to\; -2k=\frac{-2}{k} \;\to\; k^2=1 \;\to\; k=-1, k=1$$

Solo el valor $k=1$ garantiza ambas condiciones, por lo que la función es derivable en $x=1$ solo si $k=1$.

Modelo 15. Opción B. Ejercicio 2

Considere las curvas $f(x)=3-x^2$ y $g(x)=\frac{-x^2}{4}$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de $g(x)$. Determina el punto de tangencia con la gráfica de $g(x)$.

b) Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ y las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (las dos curvas y la recta).

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

a) Para obtener la recta tangente a una función en un punto x_0 necesitamos la imagen del punto $f(x_0)$ y la derivada de la función evaluada en el punto $f'(x_0)$ (que coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente).

$x_0=1 \rightarrow f(1)=2$

$f'(x)=-2x \rightarrow f'(1)=-2$

De la ecaución punto-pendiente de la recta → $r:-2=\frac{y-2}{x-1} \rightarrow y=-2x+4$

Esta recta será, a su vez, tangente a la otra función $g(x)$ si solo la corta en un único punto (punto de tangencia) y la pendiente de la recta coincide con la derivada de la función $g(x)$ en ese punto de tangencia.

Igualamos recta y función → $-2x+4=\frac{-x^2}{4} \rightarrow 0=-x^2+8x-16 \rightarrow 0=(x-4)^2$ → El único punto de corte acontece para $x=4$.

Comprobamos, finalmente, que la derivada de $g(x)$ en $x=4$ coincide con -2 , valor de la pendiente de la recta.

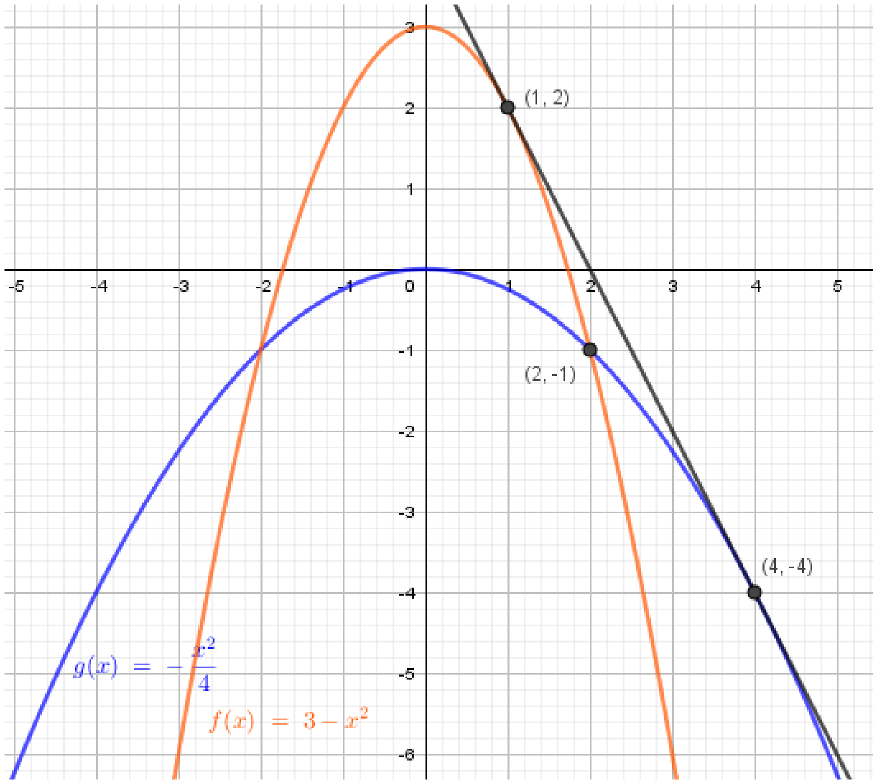
$g'(x)=\frac{-x}{2} \rightarrow g'(4)=-2$ → El punto de tangencia es $(4,g(4))=(4,-4)$

b) Para obtener el recinto limitado obtengo los vértices de cada parábola y los cortes entre las parábolas y de cada parábola con la recta (que coincide con la recta tangente del apartado anterior, por lo que ya sé que la recta y $f(x)$ solo se cortan en $x=1$, mientras que la recta y $g(x)$ se cortan solo en $x=4$).

Vértice de $f(x)=3-x^2 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -2x=0$ → En $x=0$ hay un máximo absoluto.

Vértice de $g(x)=\frac{-x^2}{4} \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow \frac{-x}{2}=0$ → En $x=0$ hay un máximo absoluto

Cortes entre las parábolas → $f(x)=g(x) \rightarrow 3-x^2=\frac{-x^2}{4} \rightarrow x=\pm 2$



c) El área encerrada simultáneamente por la recta y las dos parábolas ocurre en el intervalo $[1,4]$. Hay que darse cuenta que en $[1,2]$ la gráfica que queda por arriba es la recta y la que queda por debajo es $f(x)=3-x^2$, mientras que en $[2,4]$ la recta sigue quedando por arriba pero por debajo está la función $g(x)=\frac{-x^2}{4}$.

$$Área=\int_1^2 (4-2x-(3-x^2))\,dx+\int_2^4 (4-2x-(\frac{-x^2}{4}))\,dx$$

$$Área=\int_1^2 (1-2x+x^2)\,dx+\int_2^4 (4-2x+\frac{x^2}{4})\,dx$$

Aplicamos la Regla de Barrow, recordando la relación entre la primitiva $F(x)$ de una función $f(x)$ a integrar en un intervalo:

$$F(x)=\int f(x)\,dx \quad \rightarrow \quad F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$Área=[x]_1^2-[x^2]_1^2+\frac{1}{3}[x^3]_1^2+4[x]_2^4-[x^2]_2^4+\frac{1}{12}[x^3]_2^4$$

$$Área=(2-1)-(4-1)+\frac{1}{3}(8-1)+4(4-2)-(16-4)+\frac{1}{12}(64-8)=1\,u^2$$

Modelo 15. Opción B. Ejercicio 3

a) Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones.

- **Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.**
- **Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.**
- **Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimso y 2 euros juntas.**

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35€, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a) El número de monedas de 50 céntimos será x, el número de monedas de 1 euro será y, el número de monedas de 2 euros será z. Con estas incógnitas montamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, con cada una de las condiciones.

$$\begin{Bmatrix} 0{,}5x+y+2z=34{,}50 \\ x+y+z=30 \\ y=x+z \end{Bmatrix}$$

Llevamos el valor de y de la tercera ecuación a las otras dos.

$$\begin{Bmatrix} 0{,}5x+(x+z)+2z=34{,}50 \\ x+(x+z)+z=30 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 1{,}5x+3z=34{,}50 \\ 2x+2z=30 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 1{,}5x+3z=34{,}50 \\ x+z=15 \end{Bmatrix}$$

De la segunda ecuación despejamos el valor de $z=15-x$ y lo llevamos a la primera ecuación.

$$1{,}5x+3(15-x)=34{,}50 \to -1{,}5x=-10{,}50 \to x=7$$

Y resolviendo el resto de incógnitas → $z=8$, $y=15$

Solución: Podemos pagar de forma única con 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 euro y 8 monedas de 2 euros.

b) Si el total a pagar es de 35 euros, de la primera ecuación del sistema del apartado anterior, llegaríamos a la condición → $1{,}5x+3(15-x)=35 \to -1{,}5x=-10 \to x=\frac{20}{3}$ → No podremos pagar, al necesitar siempre un número entero de monedas.

Modelo 15. Opción B. Ejercicio 4

Considera el punto $P(2,-1,3)$ **y el plano** Π **de ecuación** $3x+2y+z=5$ **.**
a) Calcula el punto simétrico del punto respecto del plano.

b) Calcula la distancia del punto al plano.

a) De la ecuación general del plano obtenemos su vector característico, perpendicular al plano:

$\vec{u}=(3,2,1)$

Trazamos la recta que pasa por $P(2,-1,3)$ y con vector director $\vec{u}=(3,2,1)$ $\rightarrow$ $r:\begin{Bmatrix} x=2+3t \\ y=-1+2t \\ z=3+t \end{Bmatrix}$

Esta recta es perpendicular al plano. Obtenemos el punto de corte de recta y plano, llevando la ecuación paramétrica de la recta dentro de la ecuación general del plano:

$$3(2+3t)+2(-1+2t)+(3+t)=5 \rightarrow 6+9t-2+4t+3+t=5 \rightarrow 14t=-2 \rightarrow t=\frac{-1}{7}$$

Llevando el valor del parámetro a la recta, sacamos el punto de corte de recta y plano:

$$A(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7})$$

Este punto es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, donde $P'(x',y',z')$ es el simétrico de $P(2,-1,3)$ respecto el plano. Como el punto medio es la semisuma de las componentes:

$$(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7})=(\frac{2+x'}{2},\frac{-1+y'}{2},\frac{3+z'}{2})$$

Igualando componentes:

$x'=\frac{8}{7}$, $y'=\frac{-11}{7}$, $z'=\frac{19}{7}$ $\rightarrow$ El punto solución es $P'(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7})$

b) Finalmente, la distancia de punto a plano podemos obtenerla con la expresión que relaciona las coordenadas del punto (x_0,y_0,z_0) y la ecuación general del plano $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot(3)-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{2}{7}}u$$