Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 02

Modelo 02. Opción A. Ejercicio 1

a) [0,5 puntos] Enuncia el teorema de Bolzano.

b) [0,5 puntos] Enuncia el teorema de Rolle.

c) [0,5 puntos] Encuentra una solución de $f(x)=\ln(x)+x$ con una precisión de dos cifras decimales.

d) [1 punto] Demuestra que la solución obtenida en el apartado ***c)*** es la única solución de $f(x)$.

a) Teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)\cdot f(b)<0$ ==> $f(x)$ posee solución: $\exists c\in(a,b)/f(c)=0$.

b) Teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y verifica que $f(a)=f(b)$ ==> $\exists c\in(a,b)/f'(c)=0$

c) Por el Teorema de Bolzano podemos aproximar el valor de una solución de la función si encontramos un intervalo cerrado donde la función cambie de signo al ser evaluada en sus extremos, siempre que la función sea continua en ese intervalo.

Si tomamos el intervalo $[\frac{1}{2},1]$ se cumple:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(1)=\ln(1)+1=1>0$$

Y la función $f(x)=\ln(x)+x$ es continua en el intervalo $[\frac{1}{2},1]$ por ser composición de funciones continuas dentro del intervalo. Estamos, pues, en condiciones de aplicar el Teorema de Bolzano, que afirma $\exists c\in(\frac{1}{2},1)/f(c)=0$.

Acotamos nuestro estudio al intervalo $[\frac{1}{2},\frac{7}{10}]$:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(\frac{7}{10})=\ln(\frac{7}{10})+\frac{7}{10}=0{,}34>0$$

Viendo el signo que toma la función en los extremos anteriores, acotamos el estudio a: $[\frac{1}{2},\frac{6}{10}]$:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(\frac{6}{10})=\ln(\frac{6}{10})+\frac{6}{10}=0{,}089>0$$

Estudiamos en $[\frac{1}{2},\ 0{,}55]$:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(0{,}55)=\ln(0{,}55)+0{,}55=-0{,}048<0$$

Estudiamos en $[0{,}55,\ 0{,}57]$:

$$f(0{,}55)=\ln(0{,}55)+0{,}55=-0{,}048<0 \quad , \quad f(0{,}57)=\ln(0{,}57)+0{,}57=0{,}0079>0$$

Estudiamos en $[0{,}56,\ 0{,}57]$:

$$f(0{,}56)=\ln(0{,}56)+0{,}56=-0{,}020<0 \quad , \quad f(0{,}57)=\ln(0{,}57)+0{,}57=0{,}0079>0$$

Por lo tanto ya podemos afirmar que existe una solución con precisión de dos cifras decimales:

$$x\simeq 0{,}56...$$

d) Para demostrar que la solución del apartado anterior es única, aplicamos el Teorema de Rolle.

Suponemos que existen dos soluciones distintas, para los valores $x=a \rightarrow f(a)=0$ y $x=b \rightarrow f(b)=0$, donde la función es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b) . Por el Teorema de Rolle podríamos afirmar que $\exists c\in(a,b)/f'(c)=0$.

Derivemos nuestra función:

$$f(x)=\ln(x)+x \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1+x}{x}=0 \quad \rightarrow \quad x=-1$$

Y llegamos a un absurdo matemático, ya que nuestra función no está definida para valores negativos de la variable x por no estar permitidos argumentos negativos en el logaritmo → Nuestra hipótesis de partida es falsa → No existen dos soluciones de la función → La solución obtenida en el apartado anterior es única (*c.q.d.*).

Modelo 02. Opción A. Ejercicio 2

2. Sean las funciones $f(x)=x^2-2x$ **y** $g(x)=-x^2+4x$ **.**

a) Representa las gráficas de ambas funciones, sobre los mismos ejes.

b) Calcula el área total del recinto limitado por ambas gráficas.

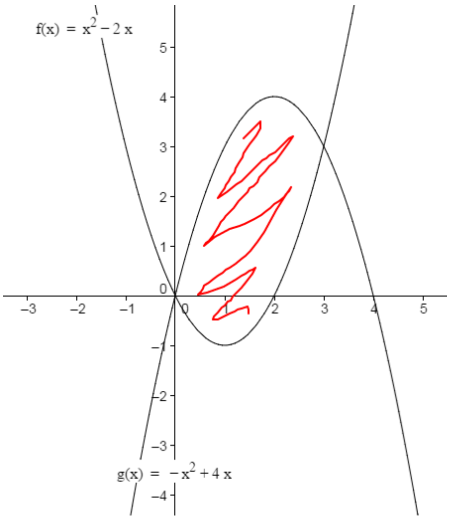
c) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$ **(sugerencia: integración por partes).**

a) El mínimo relativo de $f(x)=x^2-2x$ podemos obtenerlos derivando e igualando a 0. Es decir: $f'(x)=2x-2$, $f'(x)=0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1 \rightarrow Vértice(1,-1)$.

Los puntos de corte con el eje OX podemos obtenerlo igualando a 0 la función. Es decir: $f(x)=x^2-2x$, $f(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow Corte\ eje\ OX\ en\ (0,0)\ y\ (2,0)$.

El mínimo relativo de $g(x)=-x^2+4x$ podemos obtenerlos derivando e igualando a 0. Es decir: $g'(x)=-2x+4$, $g'(x)=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow Vértice(2,4)$.
Los puntos de corte con el eje OX podemos obtenerlo igualando a 0 la función. Es decir: $g(x)=-x^2+4x$, $g(x)=0 \rightarrow -x^2+4x=0 \rightarrow Corte\ eje\ OX\ en\ (0,0)\ y\ (4,0)$.

Con estos puntos tenemos información suficiente para pintar las gráficas (lo hago con Geogebra).



b) Obtenemos los puntos de corte de ambas gráficas.

$f(x)=g(x) \rightarrow x^2-2x=-x^2+4x \rightarrow 2x^2-6x=0 \rightarrow x(2x-6)=0$

Encontramos dos puntos de corte: $x=0$, $x=3$.

De la representación del apartado ***a)*** comprobamos que la gráfica de $g(x)$ permanece por encima de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0,3]$. Por lo tanto el área encerrada resulta:

$$A=\int_0^3 (g(x)-f(x))dx=\int_0^3 (-x^2+4x-x^2+2x)dx=\int_0^3 (-2x^2+6x)dx$$

$$A=\left[\frac{-2x^3}{3}+3x^2\right]_0^3=\frac{-2\cdot 27}{3}+3\cdot 9-0=\frac{-54}{3}+27=9 \quad u^2$$

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

Aplicamos partes.

$$x=u \quad \rightarrow \quad dx=du$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)}=dv \quad \rightarrow \quad tg(x)dx=dv$$

Es decir.

$$I=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x)dx=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx$$

$$I=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I=\left(\frac{\pi}{4}\cdot tg(\frac{\pi}{4})-0\right)+\left(\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln(1))\right)$$

$$I=\frac{\pi}{4}+\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}+\ln(\sqrt{2})-\ln(2)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)-\ln(2)$$

$$I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)$$

Modelo 02. Opción A. Ejercicio 3

3. Sean $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **.**

a) Estudia, según los valores de k **, el rango de la matriz resultante de operar** $A\,B^t+k\,I$ **, donde** B^t **es la matriz traspuesta de** B **e** I **es la matriz identidad de orden 3.**

b) Calcula la matriz que verifica $A\,B^t\,X-X=2\,B$ **.**

a) $A\,B^t=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $k\,I=\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix}$

$$A\,B^t+kI=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & k & 0\\0 & 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k & 1 & 1\\-1 & -1+k & -1\\0 & 0 & k\end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango vamos a calcular el determinante $|A\,B^t+k\,I|$. Si el determinante fuese distinto de 0, su rango sería 3. Y para los valores de k donde se anule el determinante, estimaremos en cada caso el rango de la matriz.

$$|A\,B^t+k\,I|=\begin{vmatrix}1+k & 1 & 1\\-1 & -1+k & -1\\0 & 0 & k\end{vmatrix}\rightarrow |A\,B^t+k\,I|=k\,(k^2-1)+k \rightarrow |A\,B^t+k\,I|=k^3$$

Si $k\neq 0 \rightarrow |A\,B^t+k\,I|\neq 0 \rightarrow Rango=3$

Si $k=0 \rightarrow |A\,B^t+k\,I|=0 \rightarrow Rango\neq 3$

Estudiamos el rango para $k=0 \rightarrow A\,B^t+0\cdot I=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ → Las tres columnas de la matriz son iguales, por lo que solo hay un vector columna linealmente independiente dentro de la matriz → $Rango=1$.

b) $A\,B^t\,X-X=2\,B \;\rightarrow\; (A\,B^t-I)\,X=2\,B \;\rightarrow\; X=(A\,B^t-I)^{-1}\cdot 2\,B$

$$A\,B^t-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-2&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$|A\,B^t-I|=-1$ → El determinante no es nulo, por lo que existe la matriz inversa.

$$(A\,B^t-I)^{-1}=\frac{[adj\,(A\,B^t-I)]^t}{|A\,B^t-I|}$$

Recordamos que la matriz de adjuntos tiene como elementos los distintos adjuntos $A_{ij}=(-1)^{i+j}|\alpha_{ij}|$ de la matriz.

$A_{11}=2$, $A_{12}=-1$, $A_{13}=0$

$A_{21}=1$, $A_{22}=0$, $A_{23}=0$

$A_{31}=1$, $A_{32}=-1$, $A_{33}=1$

Es decir:

$$adj(A\,B^t-I)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} \;\rightarrow\; [adj(A\,B^t-I)]^t=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A\,B^t-I)^{-1}=\frac{[adj\,(A\,B^t-I)]^t}{|A\,B^t-I|} \;\rightarrow\; (A\,B^t-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Operamos:

$$X=(A\,B^t-I)^{-1}\cdot 2\,B \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}-8\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Modelo 02. Opción A. Ejercicio 4

4. Sea el triángulo de vértices $A(-1,1,0)$, $B(0,-2,3)$ y $C(2,1,-1)$.

a) [1,5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene al triángulo .

b) [1 punto] Halla la ecuación general de la recta que une el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

a) La determinación lineal del plano $\Pi(\vec{u},\vec{v},A)$ nos permite calcular la ecuación general del plano a partir de un punto del plano y de dos vectores del plano que sean linealmente independientes.

El punto puede ser, por ejemplo, $A(-1,1,0)$. Y los vectores linealmente independientes podemos tomarlos de los vértices del triángulo.

$\vec{AB}=(1,-3,3)$, $\vec{AC}=(3,0,-1)$

Los dos vectores no son proporcionales entre si, por lo tanto son linealmente independientes.

$$\Pi(\vec{u},\vec{v},A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ -3 & 0 & y-1 \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad 0+9(y-1)+3(x+1)-0+(y-1)+9z=0$$

$$10(y-1)+3(x+1)+9z=0$$

$$\Pi: 3x+10y+9z-7=0$$

b) Sea D el punto medio del segmento $\overline{AB}$ $\rightarrow$ $D(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{3}{2})$

Sea E el punto medio del segmento $\overline{AC}$ $\rightarrow$ $E(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})$

Obtenemos un vector director de la recta → $\vec{DE}=(0,\frac{3}{2},-2)$

Y podemos escribir la ecuación paramétrica de la recta:

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=\frac{-1}{2} \\ y=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}\lambda \\ z=\frac{3}{2}-2\lambda \end{array}\right\}$$

La ecuación general la obtenemos eliminando el parámetro λ y expresando la recta como el corte de dos planos:

$$r:\left\{\begin{array}{c} x+\frac{1}{2}=0 \\ 4y+3z-\frac{5}{2}=0 \end{array}\right\}$$

Modelo 02. Opción B. Ejercicio 1

1. a) Sabiendo que $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2+bx+c & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{array}\right\}$ **es derivable en** $x=0$ **, calcula** b **y** c **.**

b) Estudia la derivabilidad de $f(x)=x^2-3|x|+2$ **en** $x=0$ **mediante la definición formal de derivada.**

a) Si la función es derivable en $x=0$ implica que también es continua. Y por continuidad:

$\exists f(0)=c$

$\lim_{x\to 0^-}(x^2+bx+c)=c$

$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\dfrac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=\dfrac{1}{1}=1$

Para que coincidan los límites laterales → $c=1$ → Existe límite y vale $L=1$

Y, además, esta condición satisface $f(0)=c=1=L$.

Una vez comprobada la continuidad, estudiamos la derivabilidad en los intervalos abiertos donde está definida la función.

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ll} 2x+b & si \quad x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{array}\right\}$$

Para que la función sera derivable en $x=0$ necesitamos que coincidan las derivadas evaluadas a la izquierda y a la derecha de $x=0$.

$f'(0^-)=b$

$f'(0^+)=\dfrac{0}{0}$ → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{-x}{(x+1)^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{2(x+1)^2}=\dfrac{-1}{2}$

Por igualdad de los límites laterales → $b=\dfrac{-1}{2}$

b) Primero rompemos el valor absoluto de la función.

$$f(x)=x^2-3|x|+2 \quad \rightarrow \quad f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+3x+2 & si & x\le 0 \\ x^2-3x+2 & si & x>0 \end{Bmatrix}$$

La función es continua en $x=0$ ya que:

$$\exists f(0)=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=2=L$$

$$f(0)=2=L$$

Las derivadas laterales alrededor de $x=0$, aplicando la definición formal de derivada, resultan:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=¿$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2+3(0+h)+2-0^2-3\cdot 0-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+3)=3$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2-3(0+h)+2-0^2+3\cdot 0-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-3)=-3$$

Las derivadas laterales no coinciden. Por lo tanto, la función no es derivable en $x=0$.

Modelo 02. Opción B. Ejercicio 2

2. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Estudia las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ **.**

c) Calcula $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$ **.**

a) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$, derivables en $\{(a,b)-\{x_0\}\}$, tales que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ ó $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Sea $x_0\in(a,b)$ y $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in\{(a,b)-\{x_0\}\}$.

Entonces, si existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ==> existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ y los límites son iguales:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Y el resultado final del límite puede ser un valor $L\in\mathbb{R}$ o diverger a infinito.

b) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

Estudiamos las asíntotas verticales en los puntos donde se anula el denominador.

$$X^{+1}=0 \quad\rightarrow\quad x^2=-1$$

El denominador no se anula para valores reales. No existen asíntotas verticales.

El estudio de las asíntotas horizontales implica estudiar el comportamiento de la función en el infinito. El grado del polinomio del numerador coincide con el grado del polinomio del denominador, por lo que el límite en el infinito coincide con el cociente de los coeficientes que acompañan a x^2 .

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=1$ → Asíntota horizontal en $y=1$

Y sabemos que si existen asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas.

El estudio de los extremos implica realizar la derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=-1 \quad , \quad x=1$$

Tenemos dos puntos críticos. Debemos evaluar el signo de la derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-1) \quad\rightarrow\quad f'(x)<0 \quad\rightarrow\quad f(x)$ decreciente

$(-1,1) \quad\rightarrow\quad f'(x)>0 \quad\rightarrow\quad f(x)$ creciente

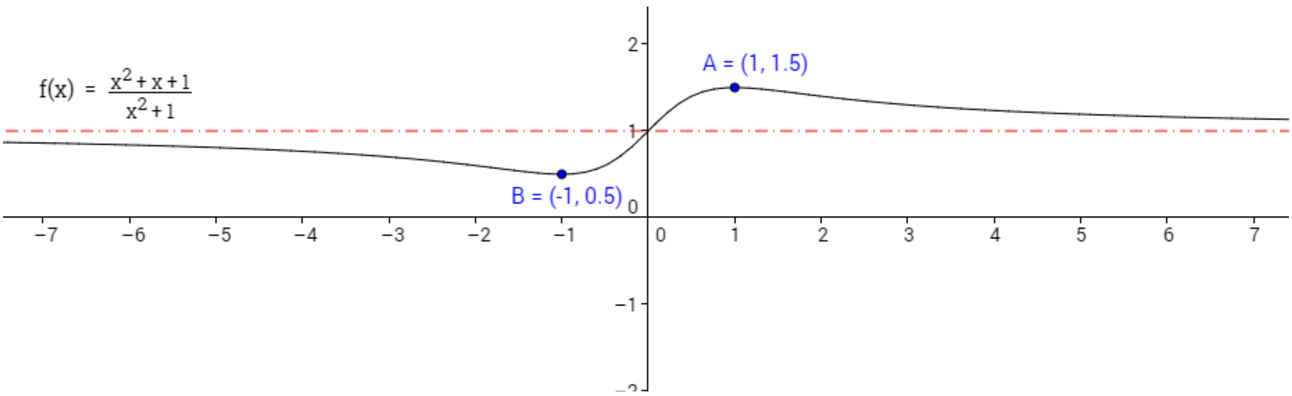
$(1,\infty) \quad\rightarrow\quad f'(x)<0 \quad\rightarrow\quad f(x)$ decreciente

Por lo tanto:

$(-1,f(-1))=(-1,\frac{1}{2})$ mínimo relativo

$(1,f(1))=(1,\frac{3}{2})$ máximo relativo

La representación con Geogebra confirma los resultados analíticos obtenidos.



c) $I=\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$

Tenemos un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador. Realizamos la división de los polinomios.

$$\frac{x^3}{x^2-5x+6}=x+\frac{5x^2-6x}{x^2-5x+6}$$

Y la integral nos queda:

$$I=\int (x+5+\frac{19x-30}{x^2-5x+6})dx=\frac{x^2}{2}+5x+\int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}dx$$

Llegamos a una segunda integral con el grado del numerador menor que el grado del denominador, por lo que hayamos las raíces del denominador.

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \rightarrow \frac{19x-30}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \rightarrow 19x-30=A(x-3)+B(x-2)$$

Si $x=3 \rightarrow B=27$

Si $x=2 \rightarrow A=-8$

$$I=\frac{x^2}{2}+5x+\int (\frac{-8}{x-2}+\frac{27}{x-3})dx=\frac{x^2}{2}+5x-8\ln|x-2|+27\ln|x-3|+C$$

Modelo 02. Opción B. Ejercicio 3

3. Dado el sistema de ecuaciones $f(x)=\left\{\begin{matrix} 4x+ay-2z=-1 \\ x+y-az=-1 \\ x+y+(2a+2)z=6-a \end{matrix}\right\}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de a **.**

b) Resolver para todos los casos en que el sistema sea compatible.

a) Planteamos la matriz ampliada del sistema.

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz A y de la matriz ampliada A/C para poder aplicar las consecuencias del teorema de Roché Frobenius.

Hacemos el determinante de la matriz A .

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & a & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} \rightarrow C'_1=C_1-C_2 \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 4-a & a & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix}$$

$$|A|=(4-a)(2a+2)+a(4-a)=(4-a)(3a+2)$$

Anulamos el determinante para conocer los valores de a que lo hacen 0.

$$|A|=0 \rightarrow (4-a)(3a+2)=0 \rightarrow a=4 \ , \ a=\frac{-2}{3}$$

Discusión de casos:

Si $a\neq 4$ y $a\neq\frac{-2}{3}$ $\rightarrow$ $rango(A)=rango(A/C)=3=número\ de\ incógnitas$ $\rightarrow$ Solución única → **Sistema Compatible Determinado**.

Si $a=4$ $\rightarrow$ $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 10 & 2 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ Estudiamos el rango de la matriz A .

Encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-14\neq 0$ $\rightarrow$ $rango(A)=2$. En la matriz ampliada A/C estudiamos los menores de orden 3 →

$$|C_2C_3C_4|=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix}=0 \ , \ |C_1C_3C_4|=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix}=0 \ , \ |C_1C_2C_4|=\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow$$

Todos los menores de orden 3 son nulos. Por lo tanto $rango(A)=rango(A/C)=2<3=número\ de\ incógnitas$ → Infinitas soluciones → **Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre**.

Si $a=\frac{-2}{3}$ → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & \frac{-2}{3} & -2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{20}{3} \end{array}\right)$ → El rango de la matriz A es 2 porque encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 4 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{14}{3}\neq 0$. En la matriz ampliada A/C estudiamos los menores de orden 3 →

$|C_1C_2C_4|=\begin{vmatrix} 4 & \frac{-2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{20}{3} \end{vmatrix}=\frac{80}{3}+\frac{2}{3}-1-(-1-4-\frac{40}{9})=\frac{325}{9}\neq 0$ → El rango de la matriz ampliada es 3 → $rango(A)=2\neq 3=rango(A/C)$ → No existe solución → **Sistema Incompatible**.

b) Resolvemos en primer lugar en los casos SCD aplicando la regla de Cramer.

Si $a\neq 4$ y $a\neq\frac{-2}{3}$ → SCD → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right)$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & a & -2 \\ -1 & 1 & -a \\ 6-a & 1 & 2a+2 \end{vmatrix}}{(4-a)(3a+2)}=\frac{-a^3+8a^2-3a+12}{(4-a)(3a+2)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & 6-a & 2a+2 \end{vmatrix}}{(4-a)(3a+2)}=\frac{-4a^2+17a-24}{(4-a)(3a+2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}4 & a & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 6-a\end{vmatrix}}{(4-a)(3a+2)}=\frac{a^2-11a+24}{(4-a)(3a+2)}=\frac{(a-3)(a-8)}{(4-a)(3a+2)}$$

Finalmente resolvemos el caso de SCI, con un parámetro libre.

Si $a=4 \rightarrow A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 4 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4 & -1\\ 1 & 1 & 10 & 2\end{array}\right)$

Tomamos como parámetro $x=\lambda$ ya que $C_1=C_2$, por lo que podemos obviar la primera columna. De esta forma nos queda:

$A/C=\left(\begin{array}{cc|c}4 & -2 & -1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 10 & 2\end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{c}4y-2z=-1\\ y-4z=-1\\ y+10z=2\end{array}\right\}$ → Igualamos las dos primeras ecuaciones →

$$\left\{\begin{array}{c}4y-2z=y-4z\\ y+10z=2\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c}3y+2z=0\\ y+10z=2\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación despejamos el valor de $y=2-10z$ y lo sustituimos en la primera ecuación.

$$3(2-10z)+2z=0 \rightarrow 6-30z+2z=0 \rightarrow z=\frac{3}{14}$$

Y por lo tanto:

$$y=2-10z \rightarrow y=2-10\cdot\frac{3}{14} \rightarrow y=\frac{-1}{7}$$

Modelo 02. Opción B. Ejercicio 4

4. a) [1,5 puntos] Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r: x-2=\frac{y-1}{3}=z+1$ y al punto $A(2,5,1)$.

b) [1 punto] Obtener los puntos de corte del plano $\Pi: x+2y+4z-4=0$ con los ejes cartesianos del espacio tridimensional.

a) Podemos expresar la ecuación del plano a partir de dos vectores linealmente independientes y un punto del plano.

El punto lo tenemos: $A(2,5,1)$.

Un primer vector del plano sería uno de los vectores directores de la recta r que contiene. Es decir: $\vec{u}=(1,3,1)$.

Y si el punto A no pertenece a la recta r , podremos obtener un punto B de la recta y trazar el vector $\vec{AB}$, que será linealment independiente respecto al vector $\vec{u}=(1,3,1)$.

Comprobemos, entonces, que A no pertenece a r :

$2-2=\frac{5-1}{3}=1+1 \rightarrow 0=\frac{4}{3}=2$ → Absurdo matemático → El punto no pertenece a la recta.

Obtengamos ahora un punto de la recta. Viendo a ecuación continua, podemos tomar $B(2,1,-1)$.

El vector $\vec{AB}$ será: $\vec{AB}=(0,-4,-2)$. Por lo tanto ya tenemos todos los elementos para expresar la ecuación paramétrica del plano (como el enunciado no exige ninguna ecuación en concreto, planteo la paramétrica).

$$\Pi: \left\{ \begin{array}{c} x=2+\alpha \\ y=5+3\alpha-4\beta \\ z=1+\alpha-2\beta \end{array} \right\}$$

b) Sabemos que la ecuación segmentaria del plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ nos ofrece los puntos de corte con los ejes: $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$. Por lo tanto:

$$\Pi: x+2y+4z-4=0 \rightarrow \Pi: x+2y+4z=4 \rightarrow \Pi: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+z=1$$

Siendo los puntos de corte: $(4,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,1)$.