Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 04

Modelo 04. Opción A. Ejercicio 1

Sea la función $f(x)=x^2-8\ln(x)$ **definida en** $f:1\rightarrow+\infty$ **.**

a) [0,5 puntos] Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) [1 punto] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función, y obtener el valor de la ordenada en cada extremo.

c) [0,5 puntos] Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

d) [0,5 puntos] ¿Posee asíntota oblicua la gráfica de la función? Justificar la respuesta.

a) El dominio de la función es $Dom(f)=x\geq 1$, según nos dice el enunciado.

Derivamos e igualamos a cero para obtener puntos críticos.

$$f(x)=x^2-8\ln(x) \rightarrow f'(x)=2x-\frac{8}{x}=\frac{2x^2-8}{x} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow 2x^2-8=0 \rightarrow x=\pm 2$$

Solo tomamos el valor $x=2$, ya que $x=-2$ no pertenece al dominio de la función.

Estudiamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos.

[1, 2) → $f'(1)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(2,+\infty) \rightarrow f'(10)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

b) En $x=2$ tenemos un extremo relativo, que además es absoluto, ya que la derivada en ese punto es nula y a la izquierda la función decrece, y a la derecha la función crece.

$f(2)=4-8\ln(2)\simeq -1,55$ → Mínimo absoluto en $(2, \ -1,55)$

Además en $x=1$ tenemos un máximo relativo, ya que la función está definida a partir de $x=1$ y es decreciente a su derecha.

$f(1)=1-8\ln(1)=1$ → Máximo relativo en $(1,1)$

c) La curvatura la estudiamos con la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{4x\cdot x-(2x^2-8)}{x^2}=\frac{2x^2+8}{x^2} \quad , \quad f''(x)=0 \ \rightarrow \ 2x^2+8=0 \ \rightarrow \ x=\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$$

No tenemos puntos candidatos a puntos de inflexión, al no anularse la segunda derivada para ningún valor real.

La curvatura la estudiamos, de manera única, en todo el dominio.

$x\geq 1 \ \rightarrow \ f''(1)>0 \ \rightarrow \ f(x)$ cóncava hacia arriba U

d) Las asíntotas oblicuas $y=mx+n$ pueden aparecer en el comportamiento de la función cuando la variable tiende a infinito y si converge el siguiente límite:

$$m=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^2-8\ln(x)}{x}=\lim_{x\rightarrow\infty}\left(x-\frac{8\ln(x)}{x}\right)=\infty-0=\infty$$

Donde hemos usado que, en el infinito, el cociente ente logaritmo y polinomio tiende a cero.

Por lo tanto, al no converger a un valor finito el anterior límite, no existe asíntota oblicua.

Modelo 04. Opción A. Ejercicio 2

Sea la función $f(x)=\ln(x^3-4x)$ **.**

a) Determina el dominio de la función.

b) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto $x=-1$ **.**

c) Calcula el área encerrada por la función $g(x)=x^3-4x$ **y la recta** $y=-x-2$ **.**

a) El argumento del logaritmo debe ser positivo, ya que el logaritmo no está definido para argumentos negativos ni nulos.

$$x^3-4x>0 \rightarrow x(x^2-4)>0 \rightarrow x(x+2)(x-2)>0$$

Estudiamos el signo del miembro a la izquierda de la inecuación en los intervalos formados por la solución del polinomio.

$(-\infty,-2) \rightarrow x=-10 \rightarrow -10(-10+2)(-10-2)<0$

$(-2,0) \rightarrow x=-1 \rightarrow -1(-1+2)(-1-2)>0$ → Pertenece al dominio

$(0,2) \rightarrow x=1 \rightarrow 1(1+2)(1-2)<0$

$(2,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow 10(10+2)(10-2)>0$ → Pertenece al dominio

Es decir:

$$Dom(f)=(-2,0)\cup(2,+\infty)$$

b) $f(x)=\ln(x^3-4x) \rightarrow f(-1)=\ln(-1+4)=\ln(3)$ → Punto $(-1,\ln(3))$

Derivamos para obtener la pendiente de la recta.

$$f'(x)=\frac{3x^2-4}{x^3-4\text{x}} \rightarrow f'(1)=\frac{3-4}{-1+4}=\frac{-1}{3}$$

Podemos escribir la ecuación punto pendiente de la recta tangente.

$$\frac{-1}{3}=\frac{y-\ln(3)}{x+1}$$

c) Debemos obtener los puntos de corte de ambas funciones, para conocer los límites del área encerrada. Para ello, igualamos las funciones y resolvemos.

$$x^3-4x=-x-2 \rightarrow x^3-3x+2=0 \rightarrow (x-1)(x+2)^2=0$$

Los puntos de corte de ambas gráficas acontecen en $x=-2$ y $x=1$.

Debemos saber qué gráfica se encuentra por encima, en el intervalo $[-2,1]$, para estimar la forma de la integral definida. O bien realizar la integral definida de la resta de ambas funciones (sin considerar el orden), y aplicar valor absoluto para garantizar que obtenemos una cantidad positiva.

Por practicar un poco, no cuesta nada pintar ambas gráficas sobre unos mismos ejes.

La recta es sencilla de pintar. Para el polinomio podemos obtener los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos, para hacernos una idea de cómo es su gráfica.

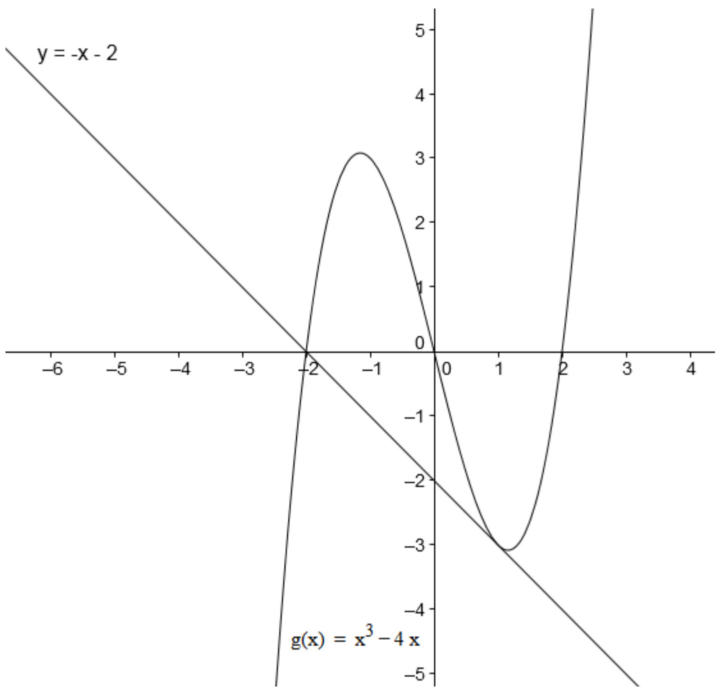
$g(x)=x^3-4x$ → Corte eje OX → $(-2,0),(0,0),(2,0)$

$g'(x)=3x^2-4 \quad , \quad g'(x)=0 \;\rightarrow\; x=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$

$g''(x)=6x \;\rightarrow\; g''\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)<0 \quad , \quad g''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)>0$

$x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ máximo relativo

$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ mínimo relativo



El área resulta:

$$A=\int_{-2}^{1}\left(x^3-4x-(-x-2)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$A=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2-4+6+4=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+8=\frac{1-6+32}{4}=\frac{27}{4}\quad u^2$$

Modelo 04. Opción A. Ejercicio 3

Dado el sistema $\left\{\begin{matrix} x+y+z=2 \\ a\,x+2\,y+3\,z=0 \\ a^2\,x+4\,y+9\,z=-12 \end{matrix}\right\}$

a) Estudiar la compatibilidad del sistema según el parámetro real a **.**

b) Resolver, si es posible, para $a=3$ **.**

a) Escribimos la matriz del sistema y la matriz ampliada.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \\ a^2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 3 & 0 \\ a^2 & 4 & 9 & -12 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema, calculando su determinante e igualándolo a 0 .

$$|M|=18+3\,a^2+4\,a-(2\,a^2+12+9\,a)=a^2-5\,a+6=0 \ \rightarrow \ a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

$$a=2 \quad , \quad a=3$$

Discusión de casos:

Si $a\neq 2$ y $a\neq 3$ $\rightarrow$ $rango(M)=3=rango(M/D)=número\ de\ incógnitas$ $\rightarrow$ Solución única → Sistema compatible determinado.

Si $a=2$ $\rightarrow$ $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 9 & -12 \end{array}\right)$

El rango de M es 2 , ya que encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{22}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=9-4=5\neq 0$.

Estudiamos el rango de M/D , evaluando los determinantes de orden 3 que contiene. Por ejemplo:

$$|C_2\,C_3\,C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -12 \end{vmatrix}=-36+0+36-(24+0-24)=0$$

$$|C_1C_3C_4|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 9 & -12\end{vmatrix}=0$$ → Es nulo por coincidir con el determinante antes calculado.

$$|C_1C_2C_4|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 4 & 4 & -12\end{vmatrix}=0$$ → Es nulo por tener dos columnas iguales $C_1=C_2$.

Por lo tanto el rango de M/D es igual a 2, ya que ningún determinante de orden 3 contenidos en la matriz ampliada es distinto de 0.

Es decir $rango(M)=rango(M/D)=2<3=número\ \ de\ \ incógnitas$ → Infinitas soluciones → Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (3 – 2 = 1 parámetro).

Si $a=3$ → $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 9 & 4 & 9\end{pmatrix}$, $M/D=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 0\\ 9 & 4 & 9 & -12\end{array}\right)$

El rango de M es 2 , ya que encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{31}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$.

Estudiamos el rango de M/D , evaluando los determinantes de orden 3 que contiene. Por ejemplo:

$$|C_2C_3C_4|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 9 & -12\end{vmatrix}=-36+0+36-(24+0-24)=0$$

$$|C_1C_3C_4|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 0\\ 9 & 9 & -12\end{vmatrix}=0$$ → Es nulo por tener dos columnas iguales $C_1=C_2$.

$$|C_1C_2C_4|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 0\\ 9 & 4 & -12\end{vmatrix}=0$$ → Es nulo por coincidir con el primer determinante calculado, intercambiando el orden de las dos primeras columnas.

Por lo tanto el rango de M/D es igual a 2, ya que ningún determinante de orden 3 contenidos en la matriz ampliada es distinto de 0.

Es decir $rango(M)=rango(M/D)=2<3=número\ \ de\ \ incógnitas$ → Infinitas soluciones → Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (3 – 2 = 1 parámetro).

b) Si $a=3 \rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 9 & -12 \end{array}\right)$

En el apartado anterior demostramos que para $a=3$ tenemos SCI con un parámetro libre. Tomamos, por ejemplo, $z=\lambda$ como parámetro y reducimos nuestro sistema a dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} x+y=2-\lambda \\ 3x+2y=-3\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3x+3y=6-3\lambda \\ 3x+2y=-3\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow y=6$$

Llevamos este resultado a una de las dos ecuaciones del sistema.

$$x+6=2-\lambda \rightarrow x=-4-\lambda$$

Las infinitas soluciones de nuestro SCI resultan:

$$x=-4-\lambda$$
$$y=6$$
$$z=\lambda$$

Modelo 04. Opción A. Ejercicio 4

Sean los planos:

$\Pi_1: 2x+2y+az=1$ **,** $\Pi_2: 2x+ay+2z=-2$ **y** $\Pi_3: ax+2y+2z=1$

a) El valor de a para que los planos tengan una recta en común.

b) Hallar el vector director de dicha recta.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta común a los tres planos.

a) Debemos estudiar la solución común de los tres planos, lo cual reduce nuestro problema de geometría al estudio de la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+2y+az=1 \\ 2x+ay+2z=-2 \\ ax+2y+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & 2 & -2 \\ a & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema A y de la matriz ampliada A/C .

Si la solución del sistema es una recta, necesitamos que el sistema sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), con un parámetro libre. Es decir, necesitamos:

$$rango(A)=rango(A/C)=2<3=número \quad de \quad incógnitas$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix}=4a+4a+4a-(a^3+8+8)=-a^3+12a-16=0 \quad \rightarrow \quad a=2 \quad , \quad a=-4$$

Discusión de casos:

Si $a\neq 2$ y $a\neq -4$ → Solución única → Sistema compatible determinado → La solución es un punto. Este caso no nos da una recta solución.

Si $a=2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → El rango de A es 1, por tener tres columnas idénticas, por lo que solo hay un vector linealmente independiente. Este caso tampoco nos sirve, ya que necesitamos que el rango de A sea 2.

Si $a=-4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → El rango de A es 2, ya que existe al menos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8-4=-12\neq 0$.

Debemos estudiar el rango de la matriz ampliada A/C , para lo cual estudiamos todos los determinantes de orden 3 contenidos en la matriz ampliada.

$$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4+16-8-(4-8+16)=0$$

$$|C_1 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4-16+4-(-8-8-8)=16\neq 0 \quad \rightarrow \quad rango(A/C)=3$$

Hemos obtenido al menos un menor de orden 3 no nulo dentro de la matriz ampliada. Por lo tanto:

Si $a=-4 \rightarrow rango(A)=rango(A/C)=2<3=número\ de\ incógnitas \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (3 – 2 = 1 parámetro libre). La solución común a los tres planos es una recta.

b) Buscamos la ecuación de la recta solución, para obtener un vector director de la misma.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → SCI → Tomamos como parámetro $z=\lambda$

Reduciendo nuestro estudio a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} 2x+2y=1+4\lambda \\ 2x-4y=-2-2\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow \quad 6y=3+6\lambda \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{2}+\lambda$$

Llevamos este valor a la primera de las ecuaciones del sistema.

$$2x+2\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)=1+4\lambda \quad \rightarrow \quad 2x+1+2\lambda=1+4\lambda \quad \rightarrow \quad 2x=2\lambda \quad \rightarrow \quad x=\lambda$$

La recta solución, en paramétricas, resulta:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Vector director} \quad \vec{u}_r=(1,1,1)$$

c) La ecuación paramétrica de la recta la hemos obtenido en el apartado anterior.

$$r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$$

Modelo 04. Opción B. Ejercicio 1

Sea la función $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$ **definida para** $x>0$ **.**

a) Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica en el punto de abscisa $x=1$ **.**

c) Halla el área del triángulo formado por la recta tangente a la función en el punto $x=\frac{1}{e}$ **con los semiejes positivos de coordenadas.**

a) El punto de máxima pendiente de $f(x)$ es el que maximiza a la función derivada $f'(x)$. Es decir, debemos obtener a segunda derivada e igualarla a cero, para obtener el máximo absoluto de la función derivada.

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x) \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \rightarrow f''(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}$$

$f''(x)=0 \rightarrow \frac{1-x}{x^3}=0 \rightarrow x=1$ → punto crítico de $f'(x)$

Para decidir si es un máximo o un mínimo de $f'(x)$, vamos a evaluar la tercera derivada en $x=1$.

$f'''(x)=\frac{-3}{x^4}+\frac{2}{x^3}$, $f'''(1)=-3+2<0 \rightarrow x=1$ es un máximo relativo

Además $x=1$ es máximo absoluto de la función → Punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ donde acontece la pendiente máxima de $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$.

b) $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x) \rightarrow f(1)=\frac{1}{2}$ → Punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \rightarrow f'(1)=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$ → Pendiente de la recta tangente $m_{tangente}=\frac{1}{2}$

El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 . Por lo que a recta normal a la función en $x=1$ tendrá pendiente $m_{normal}=-2$. Y con la pendiente de la recta normal y el punto por donde pasa, podemos escribir la ecuación punto-pendiente.

$$-2=\frac{y-\frac{1}{2}}{x-1} \rightarrow -2x+2=y-\frac{1}{2} \rightarrow y=-2x+\frac{5}{2}$$

c) Primero obtenemos la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x=\frac{1}{e}$.

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x) \rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e}{2}-1=\frac{e-2}{2} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{1}{e},\frac{e-2}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \rightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-e^2}{2}+e=\frac{-e^2+2e}{2} \rightarrow \text{Pendiente } m_{tangente}=\frac{-e^2+2e}{2}$$

Y la ecuación de la recta tangente será:

$$\frac{-e^2+2e}{2}=\frac{y-\frac{e-2}{2}}{x-\frac{1}{e}}$$

Debemos obtener los puntos de corte de esta recta con los ejes cartesianos, para sacar así la base y la altura del triángulo rectángulo que forma con los semiejes positivos de coordenadas.

$$x=0 \rightarrow \frac{e-2}{2}=y-\frac{e-2}{2} \rightarrow y=\frac{e-2}{2}+\frac{e-2}{2}=e-2\simeq 0{,}72$$

$$y=0 \rightarrow \frac{-e^2+2e}{2}=\frac{\frac{-e+2}{2}}{x-\frac{1}{e}} \rightarrow x-\frac{1}{e}=\frac{\frac{-e+2}{2}}{\frac{-e^2+2e}{2}} \rightarrow x=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}\simeq 0{,}74$$

Y el área resulta → $A=\frac{1}{2}\cdot 0{,}72\cdot 0{,}74\simeq 0{,}26\ u^2$

Modelo 04. Opción B. Ejercicio 2

a) Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx$ **.**

b) Sea $f(x)=-x^2+2x+3$ **y la recta** $2x+y-7=0$ **. Calcula el área encerrada por las gráficas de ambas funciones con el semieje positivo** OX **.**

a) $I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx$

Resolvemos por partes.

$$u=\ln(4-x) \rightarrow du=\frac{-1}{4-x}dx$$

$$dv=dx \rightarrow v=x$$

Sustituimos.

$$I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx=[x\ln(4-x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{-x}{4-x}dx=[\ln(3)+\ln(5)]-\int_{-1}^{1}\frac{4-x-4}{4-x}dx$$

$$I=[\ln(3)+\ln(5)]-\int_{-1}^{1}dx-\int_{-1}^{1}\frac{-4}{4-x}dx=[\ln(3)+\ln(5)]-[x]_{-1}^{1}+4\int_{-1}^{1}\frac{1}{4-x}dx$$

$$I=[\ln(3)+\ln(5)]-[1+1]-4[\ln(4-x)]_{-1}^{1}=[\ln(3)+\ln(5)]-2-4[\ln(3)-\ln(5)]$$

$$I=-3\ln(3)+5\ln(5)-2=-\ln(27)+\ln(3125)-2=\ln\left(\frac{3125}{27}\right)-2=\ln(115{,}74)-2\simeq 2{,}75$$

b) Debemos representar $f(x)=-x^2+2x+3$ y la recta $2x+y-7=0$. Primero obtenemos los puntos de corte de ambas gráficas.

$2x+y-7=0 \rightarrow y=-2x+7 \rightarrow$ Igualamos ambas gráficas.

$$-x^2+2x+3=-2x+7 \rightarrow -x^2+4x-4=0 \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$$

Encontramos un único punto de corte de ambas gráficas $\rightarrow$ $(2,3)$

Obtenemos punto de corte de la recta con los ejes.

$$y=-2x+7 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,7)$$

$$y=-2x+7 \rightarrow y=0 \rightarrow \left(\frac{7}{2},0\right)$$

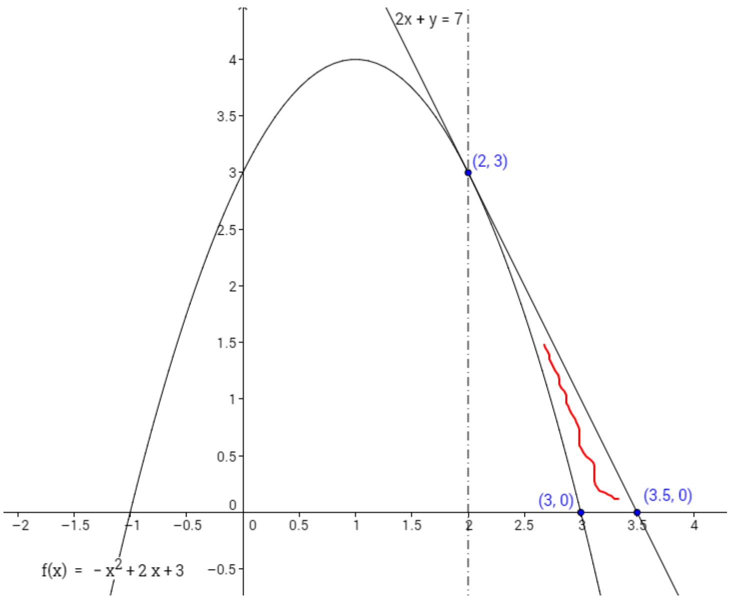
Obtenemos punto de corte de la parábola con los ejes.

$f(x)=-x^2+2x+3 \quad , \quad y=0 \quad \rightarrow \quad -x^2+2x+3=0 \quad \rightarrow \quad (-1,0),(3,0)$

$f(x)=-x^2+2x+3 \quad , \quad x=0 \quad \rightarrow \quad (0,3)$

Obtenemos el máximo absoluto de la parábola.

$f(x)=-x^2+2x+3 \quad \rightarrow \quad f'(x)=-2x+2 \quad , \quad f(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \quad (1,4)$ máximo



Por lo tanto, el área resulta:

$$A=\int_2^{\frac{7}{2}}(-2x+7-(-x^2+2x+3))\,dx=\int_2^{\frac{7}{2}}(x^2-4x+4)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^{\frac{7}{2}}$$

$$A=\frac{343}{24}-\frac{49}{2}+14-\frac{8}{3}+8-8=\frac{343-588+336-64}{24}=\frac{27}{24}=\frac{9}{8}\quad u^2$$

Modelo 04. Opción B. Ejercicio 3

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Para qué valores de m **se verifica** $A^2=2A+I$ **? (Siendo** I **la matriz identidad).**

b) Para $m=1$ **calcula** A^{-1} **.**

c) Para $m=1$ **calcula** X **que satisface** $A\cdot X-B=A\cdot B$ **.**

a) $A^2=2A+I \rightarrow \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Operamos.

$$\begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 1+m+1-m \\ 1+m+1-m & 1+(1-m)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2+2+2m & 2 \\ 2 & m^2+2-2m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2m & 1 \\ 3 & 2-2m \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices, encontramos las siguientes incongruencias o absurdos matemáticos.

$2=1 \quad , \quad 2=3$

Por lo tanto, no existe ningún valor real m que satisfaga la ecuación matricial.

b) $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \rightarrow m=1 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|A|=0-1=-1\neq 0$ → Existe $A^{-1} \rightarrow A^{-1}=\dfrac{[adj(A)]^t}{|A|}$

$A_{11}=0 \quad , \quad A_{12}=-1$

$A_{21}=-1 \quad , \quad A_{22}=2$

Es decir → $adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

En efecto → $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$A\cdot X-B=A\cdot B \;\rightarrow\; A\cdot X=A\cdot B+B \;\rightarrow\; A\cdot X=(A+I)B \;\rightarrow\; X=A^{-1}\cdot(A+I)\cdot B$$

$$X=(A^{-1}\cdot A+A^{-1}\cdot I)\cdot B \;\rightarrow\; X=(I+A^{-1})\cdot B$$

Operamos.

$$I+A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$(I+A^{-1})\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \;\rightarrow\; X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Modelo 04. Opción B. Ejercicio 4

Sean las rectas:

$$r:\begin{Bmatrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix} \quad , \quad s:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$$

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas rectas.

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Primero debemos conocer la posición relativas de ambas rectas. Podemos estudiar el rango de la matriz formada por un vector director de cada recta y por un tercer vector formado por dos puntos pertenecientes a cada una de las rectas.

$\vec{u}_r=(1,1,1)$ → Vector director de r , $A(1,1,0)\in r$

$\vec{u}_s=(-2,1,-2)$ → Vector director de s , $B(1,0,1)\in s$

$\vec{AB}=(0,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Estudiamos su rango} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1+2+0-(0+2-2)=3\neq 0$$

El rango es 3, por lo que tenemos tres vectores linealmente independientes, por lo que ambas rectas son cruzadas.

La recta perpendicular que estamos buscando la denominamos t , y debe cortar ambas rectas r y s de manera perpendicular. Por lo tanto, el producto escalar del vector director de t con cada uno de los vectores directores de las otras rectas debe ser nulo.

El vector director de t lo sacamos a partir de dos puntos genéricos de las otras dos rectas. Para ello, expresamos s en paramétricas.

Punto genérico de r → $\begin{Bmatrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$

Punto genérico de s → $\begin{Bmatrix} x=1-2\mu \\ y=\mu \\ z=1-2\mu \end{Bmatrix}$

Vector director de t → $\vec{u}_t=(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda)$

Realizamos los productos escalares.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_t = 0 \quad \rightarrow \quad (1,1,1)\cdot(-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda)=0$$
$$-2\mu-\lambda-1+\mu-\lambda+1-2\mu-\lambda=0 \quad \rightarrow \quad -3\mu-3\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \mu=-\lambda$$

$$\vec{u}_s \cdot \vec{u}_t = 0 \quad \rightarrow \quad (-2,1,-2)\cdot(-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda)=0$$
$$4\mu+2\lambda-1+\mu-\lambda-2+4\mu+2\lambda=0 \quad \rightarrow \quad 9\mu+3\lambda-3=0 \quad \rightarrow \quad 3\mu+\lambda-1=0$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde:

$$\mu=-\lambda \quad \rightarrow \quad -2\lambda-1=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-1}{2} \quad , \quad \mu=\frac{1}{2}$$

Con estos valores podemos sacar, de la ecuaciones genéricas de puntos, un punto de la recta t . Y podemos sacar su vector director.

$$\begin{Bmatrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{u}_t=(-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda) \quad \rightarrow \quad \vec{u}_t=(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

Por lo que la recta t buscada es:

$$t: \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \end{Bmatrix}$$

b) La distancia entre ambas rectas coincide con el módulo del vector director $\vec{u}_t=(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, ya que lo obtuvimos como diferencia entre los puntos de corte de la recta perpendicular con las dos rectas de partida del enunciado. Por lo tanto:

$$d(r,s)=|\vec{u}_t|=\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad u$$