Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 06

Modelo 06. Opción A. Ejercicio 1

a) Realiza un dibujo aproximado de la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} 4x+12 & si \quad x\leq -1 \\ x^2-4x+3 & si \quad x>-1 \end{cases}$

b) Calcula el área del recinto limitado por la función del apartado *a)*, el eje de abscisas y la recta $x=2$ **.**

c) Sea la función $g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4$ **. Hallar los puntos de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta** $0=2x+3y-4$ **.**

Modelo 06. Opción A. Ejercicio 2

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=x^3-4x^2+4x$ **.**

b) Determina el valor de a **para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función** $f(x)=x^3+ax-1$ **en el intervalo** $[0,1]$ **. Para este valor de** a **calcula un punto** $c\in(0,1)$ **en que la recta tangente a la gráfica de** $f(x)$ **sea paralela al eje** OX **.**

Modelo 06. Opción A. Ejercicio 3

Calcular las matrices A **y** B **tales que:**

$$5A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Modelo 06. Opción A. Ejercicio 4

Dados el plano $\Pi: x+y-z-1=0$ y la recta $r:\begin{cases} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano.

b) Calcula la distancia de la recta al plano.

c) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular a Π .

a) Vamos a formar un sistema con las dos ecuaciones que forman la ecuación implícita de la recta y con la ecuación general del plano. Será un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 3x+y+z=6 \\ 2x+y=2 \\ x+y-z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Según la solución de este sistema, podremos concluir la posición relativa de la recta y el plano.

El determinante de la matriz del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+0+2-(1+0-2)=0 \rightarrow \text{El rango de la matriz del sistema no es 3}$$

Existe al menos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ → El rango de la matriz del sistema es 2.

Ahora estudiamos el rango de la matriz ampliada. Primero buscamos si existe al menos un menor de orden 3 no nulo.

$$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0+2-6-(0-2+1)=-3\neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Por lo tanto:

$rango(A)=2\neq 3=rango(A/C)$ → Sistema sin solución según el Teorema de Roché-Frobenius → Sistema incompatible → La recta es paralela al plano.

b) Para calcular la distancia de la recta al plano podemos tomar un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ cualquiera de la recta y aplicar la expresión:

$$d(P,\Pi)=\frac{|A x_0+B y_0+C z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Para obtener un punto de la recta podemos pasar de la forma implícita a paramétricas.

$$r:\begin{Bmatrix} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=2-2\lambda \ , \ z=4-\lambda \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-\lambda \end{Bmatrix}$$

Un punto de la recta es $P(0,2,4)$.

Y la distancia al plano $\Pi: x+y-z-1=0$ resulta:

$$d(P,\Pi)=\frac{|0+2-4-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3} \ u$$

c) Finalmente buscamos un plano que contenga a la recta $r:\begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-\lambda \end{Bmatrix}$ y sea perpendicular al plano $\Pi: x+y-z-1=0$.

Podemos obtener un plano con un punto y con dos vectores linealmente independientes que pertenezcan al plano.

El punto es $P(0,2,4)$, que pertenece a la recta y, en consecuencia, pertenece al plano.

Uno de los vectores es el vector directo de la recta → $\vec{u}_r=(1,-2,-1)$.

Y el segundo vector podría ser el vector normal del plano Π , que por ser perpendicular al plano pertenecerá en consecuencia al plano que estamos buscando (que es perpendicular a Π). Este razonamiento nos sirve siempre y cuando el vector normal $\vec{u_\Pi}=(1,1,-1)$ sea linealmente independiente respecto al vector $\vec{u}_r=(1,-2,-1)$.

Ambos vectores son linealmente independientes, ya que no son proporcionales, como puede verse de los cocientes de sus componentes respectivas.

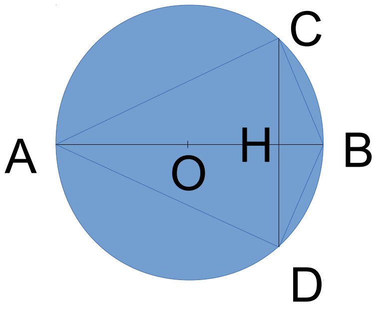
$$\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$$

Por la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u_\Pi}, P):\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & -2 & y-2 \\ -1 & -1 & z-4 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \Pi: x+z-4=0$$

Modelo 06. Opción B. Ejercicio 1

En una circunferencia de centro O y radio $10\,cm$, se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima? (ver imagen)



El área del triángulo ACD es dos veces el área del triángulo rectángulo ACH.

$$A_{ACD}=2\,A_{ACH}$$

El área del triángulo BCD es dos veces el área del triángulo rectángulo BCH.

$$A_{BCD}=2\,A_{BCH}$$

La diferencia de áreas resulta:

$$D=A_{ACD}-A_{BCD}=2\,A_{ACH}-2\,A_{BCH}$$

La distancia $\overline{OH}$ la llamamos x . Y la distancia $\overline{CH}$ la llamaremos y .

Por lo tanto, la distancia $\overline{BH}$ será $10-x$. Y la distancia $\overline{AH}=10+x$.

Con esto, podemos calcular las áreas.

$$A_{ACH}=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura=\frac{1}{2}\cdot(10+x)\cdot y$$

$$A_{BCH}=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura=\frac{1}{2}\cdot(10-x)\cdot y$$

$$D=2\,A_{ACH}-2\,A_{BCH}=(10+x)\,y-(10-x)\,y \quad\rightarrow\quad D=2\,x\,y$$

Ya tenemos la función a optimizar. Pero depende de dos variables. Debemos buscar una relación entre ambas variables para poder derivar, igualar a cero y obtener el máximo relativo.

Viendo el dibujo podemos aplicar Pitágoras al triángulo rectángulo OCH, donde la hipotenusa será igual al radio de la circunferencia. Y los catetos son los valores x e y respectivamente.

Pitágoras en triángulo OCH → $100=x^2+y^2 \rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$

Llevamos esta relación a la función $D=2xy$ que mide al diferencia de áreas.

$$D=2x\sqrt{100-x^2}=2\sqrt{100x^2-x^4}$$

El dominio de la función es $[-10,10]$. Físicamente solo tienen sentido distancias no negativas, es decir, $[0,10]$.

Derivamos e igualamos a cero.

$$D'=2\frac{200x-4x^3}{2\sqrt{100x^2-x^4}}=2\frac{100x-2x^3}{\sqrt{100x^2-x^4}}=4\frac{50x-x^3}{\sqrt{100x^2-x^4}}$$

$$D'=0 \rightarrow 50x-x^3=0 \rightarrow x(50-x^2)=0 \rightarrow x=0 \quad , \quad x=+\sqrt{50}=+5\sqrt{2}\simeq 7{,}07 \ u$$

En $x=0$ el área de los triángulo es la misma, por lo que la diferencia es nula y por eso la derivada se hace también 0 . Este valor no tiene sentido físico para nuestro problema.

Debemos demostrar que el punto crítico $x=+5\sqrt{2}$ es ciertamente un máximo relativo. Para ello evaluamos la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico, dentro del dominio con sentido físico $(0,10)$.

$D'(1)>0$, $D'(9)<0$ → $x=+5\sqrt{2}$ es un máximo relativo y es la distancia respecto al centro de la circunferencia que maximiza la diferencia de áreas de los triángulos.

Modelo 06. Opción B. Ejercicio 2

a) Calcula los valores de a **y** b **para que** $\lim_{x\to 0} \frac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=1$ **.**

b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx$ **.**

a) $\lim_{x\to 0} \frac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=1 \rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0} \frac{2 a x+b-2 e^{2x}}{\cos(x^2)\cdot 2x}=\frac{b-2}{0} \rightarrow b-2=0 \rightarrow b=2$$

Con ese valor $b=2$ vuelvo a tener una indeterminación $\frac{0}{0}$ y existen opciones de que el límite converja a un valor finito. Volvemos a aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 a x+2-2 e^{2x}}{\cos(x^2)\cdot 2x}=\lim_{x\to 0} \frac{2a-4 e^{2x}}{-sen(x^2)\cdot 4x^2+\cos(x^2)\cdot 2}=\frac{2a-4}{2}$$

E igualo al valor que me ofrece el enunciado.

$$\frac{2a-4}{2}=3 \rightarrow 2a-4=6 \rightarrow a=5$$

Modelo 06. Opción B. Ejercicio 3

a) Discute las soluciones del siguiente sistema en función del parámetro m .

$$\left\{\begin{matrix} x+my+z=2 \\ mx-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{matrix}\right\}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $m=1$.

Modelo 06. Opción B. Ejercicio 4

Dada la recta $r:\left\{\begin{matrix} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{matrix}\right\}$ **y los puntos** $P(1,-2,0)$ **y** $Q(0,1,3)$ **.**

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r **y es paralelo al vector** $\vec{PQ}$ **.**

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a r **, que pasa por** Q **e intersecta a** r **en un punto.**

c) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2,1,1)$ **y que pasa por el punto** $P(4,6,2)$ **, con la superficie esférica de centro** $(1,2,-1)$ **y radio** $\sqrt{26}$ **.**

a) Un plano queda determinado de manera única por un punto del plano y por dos vectores linealmente independientes del plano.

Si el plano contiene a la recta r podemos tomar el vector director de la recta como uno de los vectores del plano, y un punto de la recta como punto del plano. Para ello pasamos la recta de implícita a paramétricas.

$$r:\left\{\begin{matrix} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow z=\lambda \rightarrow x=\lambda \ , \ y=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$$

$A(0,0,0)\in r \ , \ \vec{u}_r=(1,1,1)$

Si el vector $\vec{PQ}$ es paralelo al plano, podría ser nuestro segundo vector, siempre y cuando sea linealmente independiente respecto de $\vec{u}_r$.

$\vec{PQ}=(-1,3,3)$

Ambos vectores son linealmente independientes por no ser proporcionales, ya que $\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Por la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{PQ},A):\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow \Pi: z-y=0$$

c) Tengo una recta de vector director $\vec{u}_r=(2,1,1)$ y que pasa por el punto $P(4,6,2)$. Su ecuación paramétrica es:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=4+2t \\ y=6+t \\ z=2+t \end{matrix}\right\}$$

Una esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio r tiene ecuación general:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

La esfera del enunciado tiene centro $(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$. Por lo tanto:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=26$$

Los puntos de corte de la recta con la esfera se obtienen, por ejemplo, sustituyendo los valores en paramétricas de cada incógnita en la ecuación de la esfera.

$$(4+2t-1)^2+(6+t-2)^2+(2+t+1)^2=26$$

$$(3+2t)^2+(4+t)^2+(3+t)^2=26$$

$$(9+4t^2+12t)+(16+t^2+8t)+(9+t^2+6t)=26$$

$$6t^2+26t+8=0 \rightarrow 3t^2+13t+4=0 \rightarrow t=\frac{-13\pm\sqrt{169-48}}{6}=\frac{-13\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{-13\pm 11}{6}$$

$$t=-4 \quad , \quad t=\frac{-1}{3}$$

Los dos puntos de corte con la esfera son:

$$t=-4 \rightarrow A(-4,2,-1)$$

$$t=\frac{-1}{3} \rightarrow B(\frac{10}{3},\frac{17}{3},\frac{5}{3})$$